

CORRIGÉ ENAC 2016

Remarques :

Je n'ai jamais vu un QCM aussi inintéressant (et pourtant, j'en ai corrigé des QCM de l'ENAC et de l'ICNA!) : que des calculs, souvent les mêmes, aucun raisonnement, aucune question ne demandant de la réflexion, de l'application bêta de formules.

Un problème comme ça, il y a de quoi vous dégoûter des maths !

PARTIE I

1. m, g, h sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique de x et y .
Le calcul simple de $m - x$ et de $m - y$ donne immédiatement la réponse.

Q1 : Réponses B, C

2. Puisque $y \geq x > 0$, $\frac{g}{x} = \sqrt{\frac{y}{x}} \geq 1$ donc $g \geq x$.
On obtient de même $g \leq y$.

Q2 : Réponses A, D

3. $\frac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\frac{1}{x}$ et de $\frac{1}{y}$ donc est compris entre ces deux nombres : $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{h} \leq \frac{1}{x}$.
On en déduit $x \leq h \leq y$.

Q3 : Réponses C, D

4. - $m - g = \frac{x + y - 2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} \geq 0$, soit $g \leq m$.
- En appliquant le résultat de cette inégalité à $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ au lieu de x et y (le fait que $x \leq y$ n'intervenant pas ici), on obtient

$$\sqrt{\frac{1}{xy}} \leq \frac{1}{h}$$

donc $g \geq h$.

On a donc en conclusion : $h \leq g \leq m$. D'où :

Q4 : Réponse C

5. D'après les questions précédentes :

Q5 : Réponse B

PARTIE II

6A. B. On sait que la somme des racines cinquièmes de l'unité est nulle, c'est-à-dire :

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0.$$

Donc $\alpha + \beta = -1$.

C. D. Compte tenu de $z^5 = 1$ on a :

$$\alpha\beta = z^3 + z^4 + z^6 + z^7 = z^3 + z^4 + z + z^2 = \alpha + \beta = -1.$$

Q6 : Réponses B, D

7. On sait que si deux nombres complexes ont pour somme s et pour produit p , ce sont les racines de l'équation :

$$X^2 - sX + p = 0.$$

Donc ici :

Q7 : Réponse A

8. Les solutions de l'équation du second degré précédente sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Or $z^4 = \frac{1}{z} = \bar{z}$ donc $\alpha = 2\operatorname{Re}(z) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et de même $\beta = 2\operatorname{Re}(z^2) = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Puisque $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$, α est la racine positive de l'équation et β en est la racine négative.

Donc :

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Les seules réponses correctes peuvent être **B.** et **D.**

On calcule ensuite les sinus de ces angles à l'aide de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et en remarquant que $\sin\frac{4\pi}{5} > 0$ et $\sin\frac{8\pi}{5} < 0$.

On trouve alors : $\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ donc la réponse **B.** est erronée.

On trouve aussi : $\sin\frac{8\pi}{5} = -\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ donc la réponse **D.** est erronée.

Q8 : Réponse E (aucune réponse exacte)

PARTIE III

9.

A. B. $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$

C. D. $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left[\sqrt{1+x^2} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$

Q9 : Réponse A

10. L'énoncé est gentil, il nous dit qu'il faut faire une intégration par parties ! On a donc, pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^1 \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}_{u'} \underbrace{x^{k-1}}_v dx = \left[x^{k-1} \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 - (k-1) \int_0^1 x^{k-2} \sqrt{1+x^2} dx \\ &= \sqrt{2} - (k-1) \int_0^1 x^{k-2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{2} - (k-1)(I_{k-2} + I_k). \end{aligned}$$

On en déduit : $kI_k = \sqrt{2} - (k-1)I_{k-2}.$

Q10 : Réponse B

11. D'après les questions précédentes :

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - I_0) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})) = \frac{1}{2}(\ln(e^{\sqrt{2}}) - \ln(1 + \sqrt{2})) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e^{\sqrt{2}}}{1 + \sqrt{2}}\right).$$

et

$$I_3 = \frac{1}{3}(\sqrt{2} - 2I_1) = \frac{1}{3}(\sqrt{2} - 2(\sqrt{2} - 1)) = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{2}).$$

Q11 : Réponses A, B

PARTIE IV

12. Il suffit de lire...

Q12 : Réponse B

13. Il suffit de calculer..

Q13 : Réponse B

14. Le déterminant du système étant non nul, il s'agit d'un système de Cramer qui possède donc une unique solution. Il suffit alors de vérifier l'une des solutions proposées par l'énoncé.

Q14 : Réponse B

15. A est inversible car $\det A \neq 0$. Pour déterminer A^{-1} , on pouvait se contenter de tester les solutions proposées par l'énoncé. On peut aussi résoudre le système $AX = Y$:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x_1 + x_2 = y_1 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = y_2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = y_3 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -3L_2 + 2L_3} \begin{cases} 3x_1 + x_2 = y_1 \\ -4x_1 - x_2 = 3y_2 + 2y_3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} L_1 \leftarrow -L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow 4L_1 + 3L_2 \end{matrix}} \begin{cases} -x_1 = y_1 + 3y_2 + 2y_3 \\ x_2 = 4y_1 + 9y_2 + 6y_3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -y_1 - 3y_2 - 2y_3 \\ x_2 = 4y_1 + 9y_2 + 6y_3 \\ x_3 = 3y_1 + 7y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

On « lit » donc directement : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$

Q15 : Réponse D

PARTIE V

16. $|z| = \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} = \sqrt{2 + 2 \cos \theta} = \sqrt{4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2 \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|.$
 Puisque $\theta \in]-\pi; \pi[$, $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ donc :

Q16 : Réponses A, C

17. Puisque $1 + \cos \theta = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\sin \theta = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a :

$$z = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) = |z| e^{i\frac{\theta}{2}}$$

donc un argument de z est $\alpha = \frac{\theta}{2}$. On a donc bien sûr $\tan \alpha = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Q17 : Réponses A, C

18. Nous venons de voir que la réponse **A.** est correcte.

Les réponses **B.** et **C.** sont donc fausses (car même si $|\cos(\frac{\theta}{2})| = \cos(\frac{\theta}{2})$ puisque $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et $\cos(\frac{\theta}{2}) = \cos|\frac{\theta}{2}|$, l'égalité $\sin(\frac{\theta}{2}) = \sin|\frac{\theta}{2}|$ est incorrecte).

Enfin on a aussi $z = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (1 + i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right))$ puisque $\cos(\frac{\theta}{2}) \neq 0$.

Q18 : Réponses A, D

PARTIE VI

19. Formule du cours...

Q19 : Réponse C

20. $\tan\left(2 \operatorname{Arc tan} \frac{1}{5}\right) = \frac{2 \tan\left(\operatorname{Arc tan} \frac{1}{5}\right)}{1 - \tan^2\left(\operatorname{Arc tan} \frac{1}{5}\right)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{12}$, puisque $\tan(\operatorname{Arc tan} x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a alors :

$$\tan\left(4 \operatorname{Arc tan} \frac{1}{5}\right) = \tan\left(2 \operatorname{Arc tan} \frac{5}{12}\right) = \frac{2 \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

En conclusion :

Q20 : Réponse B

21. Toujours avec les formules du cours et en utilisant le résultat ci-dessus :

$$\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(4\theta) - 1}{1 + \tan(4\theta)} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$$

Q21 : Réponse D

22. Il faut se rappeler que la fonction $\operatorname{Arc tan}$ est la fonction réciproque de \tan sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Donc :

Q22 : Réponses B, C

23. $\theta = \operatorname{arctan} \frac{1}{5}$ appartient à $]0; \frac{\pi}{6}[$ puisque $\frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6}$. Donc $4\theta - \frac{\pi}{4}$ appartient à $]-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{12}[$ donc à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ donc d'après les deux questions précédentes : $4\theta - \frac{\pi}{4} = \operatorname{Arc tan} \frac{1}{239}$.

Donc $4\theta - \operatorname{Arc tan} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire $4 \operatorname{Arc tan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arc tan} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

Il s'agit de la formule de John Machin (1706).

Q23 : Réponse B

24. Cela commence à devenir lassant...

$$\tan\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \varphi - 1}{1 + \tan \varphi} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1} = -\frac{1}{3}.$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

$$\tan\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{4}{3} - 1}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{1}{7}.$$

$\varphi = \text{Arc tan } \frac{1}{2}$ appartient à $]0; \frac{\pi}{6}[$ puisque $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6}$.

Donc $\varphi - \frac{\pi}{4}$ appartient bien à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ d'où $\varphi - \frac{\pi}{4} = -\text{Arctan } \frac{1}{3}$; pour la même raison on a aussi $2\varphi - \frac{\pi}{4} = \text{Arc tan } \frac{1}{7}$, ce qui donne :

Q24 : Réponses A, D

PARTIE VII

25. Puisque l'atelier n°1 produit deux fois plus de pièces que l'atelier n°2, on a évidemment $P(A_1) = \frac{2}{3}$ et $P(A_2) = \frac{1}{3}$.

Q25 : Réponse A

26. Notons D l'évènement : « la pièce est défectueuse ».

La probabilité qu'une pièce provienne de l'atelier n°1 et soit défectueuse est :

$$P(A_1 \cap D) = P(D|A_1)P(A_1) = \frac{3}{100} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{50}.$$

La probabilité qu'une pièce provienne de l'atelier n°2 et soit défectueuse est :

$$P(A_2 \cap D) = P(D|A_2)P(A_2) = \frac{4}{100} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{75}.$$

Q26 : Réponse D

27. Le système $\{A_1, A_2\}$ est un système complet d'évènements donc :

$$P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) = \frac{1}{50} + \frac{1}{75} = \frac{5}{150} = \frac{1}{30}.$$

La probabilité qu'une pièce provienne de l'atelier n°1 sachant qu'elle est défectueuse est :

$$P(A_1|D) = \frac{P(A_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{1}{30}} = \frac{3}{5}.$$

Q27 : Réponse B

PARTIE VIII

28. $\langle Q_0 | Q_1 \rangle = \int_{-1}^1 t dt = 0$, donc la famille (Q_0, Q_1) est orthogonale.
Par le procédé de Schmidt, on considère alors le polynôme

$$Q_2 = P_2 - \frac{\langle P_2 | Q_1 \rangle}{\|Q_1\|^2} Q_1 - \frac{\langle P_2 | Q_0 \rangle}{\|Q_0\|^2} Q_0$$

et on sait que la famille (Q_0, Q_1, Q_2) est orthogonale.

Il ne reste plus qu'à calculer : $\langle P_2 | Q_1 \rangle = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0$, $\langle P_2 | Q_0 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$ et $\|Q_0\|^2 = \int_{-1}^1 dt = 2$ ce qui donne $Q_2 = P_2 - \frac{1}{3}Q_0$ soit $Q_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$.

Q28 : Réponses A, D

29. $\|Q_0\|^2 = 2$, $\|Q_1\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$ et $\|Q_2\|^2 = \int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{8}{45}$ puis l'on pose $R_i = \frac{Q_i}{\|Q_i\|}$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$.
On en déduit :

Q29 : Réponses B, C

Remarque : on pouvait aussi poser $R_i = \pm \frac{Q_i}{\|Q_i\|}$, l'énoncé est donc incorrect en parlant de la base orthonormée...
Mais bon, comme la seule chose qui est demandée dans ce sujet, ce sont des calculs...

30. On se contente ici d'essayer les réponses proposées !

Il est clair que $S_1 : t \mapsto t$ est orthogonal à P_2 : $\langle S_1 | P_2 \rangle = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0$, mais ce n'est pas le cas de $S_1 : t \mapsto t - \frac{5}{4}t^2$.

Pour $S_2(t) = 1 - \frac{5}{3}t^2$, $\langle S_2 | P_2 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 \left(1 - \frac{5}{3}t^2\right) dt = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{5} = 0$, et l'autre proposition pour S_2 ne convient pas.

De plus, lorsque la famille (S_0, S_1, S_2) est orthogonale, puisqu'elle est formée de vecteurs non nuls elle est libre est c'est donc une base de E puisque $\dim E = 3$.

En conclusion :

Q30 : Réponses A, C

31. Encore une question absolument passionnante... Quel est l'intérêt de faire deux fois la même chose ?

On calcule donc $\|S_0\|^2 = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{5}$, $\|S_1\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$ et $\|S_0\|^2 = \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{5}{3}t^2\right)^2 dt = \frac{8}{9}$ puis on prend $T_i = \frac{S_i}{\|S_i\|}$.

Q31 : Réponses B, C

PARTIE IX

32. On utilise la formule célèbre : $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ donc :

$$\begin{aligned} \sin 4x + \sin 3x = \sin x &\iff 2 \sin\left(\frac{7x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\iff \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{7x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\iff \frac{x}{2} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \quad \text{ou} \quad \frac{7x}{2} \equiv \frac{x}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{7x}{2} \equiv \pi - \frac{x}{2} \pmod{2\pi} \\ &\iff x = \pi + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = 2k'\pi \quad \text{ou} \quad 4x = \pi + 2k''\pi \quad \text{avec } k, k', k'' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On peut considérer, bien que l'écriture de l'énoncé soit assez ambiguë voire incorrecte, qu'il s'agit de la réponse **A**.

Q32 : Réponse A

33. L'équation proposée peut aussi s'écrire :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x = 1,$$

soit :

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Les solutions sont donc les x tels que : $\exists k \in \mathbb{Z}, 3x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$ soit $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$. Il s'agit de la réponse **B**.
mais la réponse **D** donne le même ensemble de solutions (puisque $-\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3}$)!

Q33 : Réponses B, D

34. **La fonction sinus dans \mathbb{C} n'est plus au programme** (autant que je m'en souviens, cela fait déjà plus de 20 ans...)!

Pour ceux qui veulent s'amuser, il suffit de savoir que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

(l'exponentielle complexe étant, elle, au programme).

En posant $X = e^{iz}$, l'équation $\sin z = 3$ s'écrit alors $X - \frac{1}{X} = 6i$ soit $X^2 - 6iX - 1 = 0$.

On en déduit $X = (3 \pm 2\sqrt{2})i$ puis en posant $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, l'équation équivaut à $e^{ix}e^{-y} = (3 \pm 2\sqrt{2})i$ soit $e^{-y} = (3 \pm 2\sqrt{2})$ et $e^{ix} = i$.

On a donc $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln(3 \pm 2\sqrt{2})$.

Q34 : Réponses A, B

35. Le déterminant du système est :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2.$$

Donc :

- Si $a = 1$, le système équivaut à : $x + y + z = 1$ et admet donc une infinité de solutions.
- Si $a = -2$, la somme des trois équations amène : $0 = 3$ donc le système est incompatible.
- Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ le système admet une solution unique qu'il est inutile de chercher pour répondre à la question.

En conclusion :

Q35 : Réponse D

36. Et pour finir, de la trigonométrie, ça nous manquait !

Il suffit d'écrire $y = \frac{\pi}{3} - x$ puis en utilisant la formule $\sin p + \sin q$:

$$\sin x + \sin y = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

et l'équation devient : $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ soit $x - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{3}$ (modulo 2π).

Donc on a :

- $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) d'où $y = -\frac{\pi}{6} - 2k\pi$;
- ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) d'où $y = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$.

Q36 : Réponse C