CORRIGÉ ENAC 2018

PARTIE I

Q1. L'équation homogène associée s'écrit, sur tout intervalle ne contenant pas ± 1 :

$$y' = \frac{2x}{1-x^2}y\,.$$

La solution générale en est :

$$y(x) = C\exp\left(\int \frac{2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right) = C\exp\left(-\ln\left|1-x^2\right|\right) = \frac{C}{1-x^2}\,.$$

la constante C dépendant de l'intervalle sur lequel on se place (le signe de $1-x^2$ a été intégré dans la constante, ce qui permet de supprimer les valeurs absolues).

Puisque l'énoncé dit « **Une** solution sur V est..... », on peut donc considérer que la réponse C est exacte.

Q1 : Réponse C

Q2. En fait, pour être plus précis, l'ensemble des solutions de l'équation homogène précédente est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{C_1}{1-x^2} & \text{si } x \in \left]-\infty\,;-1\right[\\ \dfrac{C_2}{1-x^2} & \text{si } x \in \left]-1\,;1\right[\\ \dfrac{C_3}{1-x^2} & \text{si } x \in \left]1\,;+\infty\right[\end{cases}$$

C_1, C_2, C_3 étant des constantes réelles.

L'ensemble de ces solutions forme clairement un espace vectoriel de dimension 3.

Q2 : Réponse D

Q3. On peut ici se contenter d'essayer les 4 solutions...

Plus rigoureusement, on utilise la méthode de variation de la constante, en cherchant une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $y(x) = \dfrac{C(x)}{1-x^2}$, avec C de classe $\mathscr{C}^1$ sur V (en fait on résout l'équation non sur V mais sur chacun des 3 intervalles ci-dessus).

Sans faire de calcul, directement d'après le cours, on sait que :

$$y \text{ solution de } (E) \iff \frac{C'(x)}{1-x^2} = \frac{x^2}{1-x^2}$$

ce qui donne $C'(x) = x^2$ puis $C(x) = \dfrac{x^3}{3} + cste$. Une solution particulière est donc $y(x) = \dfrac{C(x)}{1-x^2} = \dfrac{x^3}{3(1-x^2)}$.

Q3 : Réponse C

Q4. On obtient la solution générale de V en ajoutant à une solution particulière la solution générale de l'équation homogène. On déduit donc de ce qui précède que l'ensemble des solutions sur V de l'équation est l'ensemble des applications de la forme :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{x^3}{3}+C_1}{1-x^2} & \text{si } x \in \left]-\infty\,;-1\right[\\ \dfrac{\frac{x^3}{3}+C_2}{1-x^2} & \text{si } x \in \left]-1\,;1\right[\\ \dfrac{\frac{x^3}{3}+C_3}{1-x^2} & \text{si } x \in \left]1\,;+\infty\right[\end{cases}$$

C_1, C_2, C_3 étant des constantes réelles.

En toute rigueur, l'ensemble des solutions sur V dépend de trois constantes, on ne peut donc pas considérer que la réponse D est correcte.

Q4 : Réponse E (aucune réponse exacte)

PARTIE II

Q5. On peut bien sûr écrire u_{n+2}, u_{n+1} et u_n puis faire les calculs ....

Plus astucieusement, on sait que si une suite (u_n) vérifie une relation de récurrence linéaire où r_1 et r_2 sont les racines distinctes de l'équation caractéristique, elle est de la forme $n \mapsto \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$.

Il suffit donc ici que l'équation caractéristique ait pour racines 2 et $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire soit égale à $(X-2)(X-\frac{1}{2}) = X^2 - \frac{5}{2}X + 1$.

On a donc la relation de récurrence : $u_{n+2} - \frac{5}{2}u_{n+1} + u_n = 0$.

Q5 : Réponse B

Q6. Si la suite (q^n) vérifie la récurrence , on a $3q^{n+2} - 2q^{n+1} - 5q^n = 0$ pour tout n donc en simplifiant par q^n (il faut supposer q non nul !) on trouve $3q^2 - 2q - 5 = 0$, d'où $q \in \left\{-1, \frac{5}{3}\right\}$.

Q6 : Réponse B

Q7. D'après le cours, l'ensemble des suites vérifiant la relation (R) est un espace vectoriel de dimension 2, engendré par les suites trouvées à la question précédente, c'est-à-dire qu'il existe des scalaires λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda(-1)^n + \mu\left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

Cela élimine directement les réponses B à D ! Il ne reste plus ensuite qu'à vérifier que la suite proposée à la réponse A vérifie bien $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{13}{3}$.

Q7 : Réponse A

PARTIE III

Q8. D'après le cours, on sait qu'il existe des réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\},\ Q(x) = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

On obtient directement :

$$a = \lim_{x\to 0} xQ(x) = 1 \quad \text{et} \quad c = \lim_{x\to 1}(x-1)^2 Q(x) = 1.$$

Enfin, la relation $\lim\limits_{x\to+\infty} xQ(x) = 0$ conduit à $a + b = 0$ soit $b = -1$.

En conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\},\ Q(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Q8 : Réponse C

Q9. On déduit du calcul précédent :

$$\int Q(x)\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + cste.$$

Sur l'intervalle $]0\,;1[$, $\ln|x| = \ln x$ et $\ln|x-1| = \ln(1-x)$ donc :

Q9 : Réponse A

Q10. Et sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, $\ln|x| = \ln x$ et $\ln|x-1| = \ln(x-1)$ donc une primitive sera $x \mapsto \ln x - \ln(x-1) - \dfrac{1}{x-1}\cdot$

Notons que même sans avoir fait aucun calcul, les 4 réponses proposées font intervenir $\ln(1-x)$ avec $1-x<0$, donc sont forcément fausses !

Q10 : Réponse E (aucune réponse exacte)

Q11. Directement avec le calcul précédent :

$$\int_2^3 Q(x)\,\mathrm{d}x = \left[\ln x - \ln(x-1) - \frac{1}{x-1}\right]_2^3 = \ln 3 - 2\ln 2 + \frac{1}{2}\cdot$$

Q11 : Réponse B

Q12. Encore un calcul quasi immédiat :

$$\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-2inx}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-(1+2in)x}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{1+2in}\mathrm{e}^{-(1+2in)x} + cste.$$

Q12 : Réponse C

Q13. Encore une décomposition en éléments simples....

Ici on cherche a, b, c, d réels tels que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}\,,\; f(t) = \frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{c}{1+t} + \frac{d}{(1+t)^2}\,.$$

En multipliant par $1+t^2$ puis en faisant $t=\mathrm{i}$ on trouve

$$a\mathrm{i} + b = \frac{2\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2} = 1$$

donc $a=0$ et $b=1$.

En multipliant par $(1+t)^2$ puis en faisant $t=-1$ on trouve $d=-1$.

Enfin, $\lim\limits_{t\to+\infty} tf(t) = 0$ conduit à $a+c=0$ soit $c=0$.

En conclusion :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}\,,\; f(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}\,.$$

Q13 : Réponse D

Q14. En utilisant les calculs précédents :

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{Arc}\tan t + \frac{1}{1+t} + cste.$$

Q14 : Réponse C

Q15. Encore un calcul trivial et sans intérêt : $I_0 = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{\textbf{Q15 : Réponse B}}$$

Q16. Notons déjà que l'intégrale proposée a bien un sens pour $n \geqslant 1$ puisque $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\ln\dfrac{1}{x}\right]^n = 0$ par croissances comparées. Donc la fonction à intégrer se prolonge par continuité sur $[0\,;1]$.
Les fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;1]$, on peut donc faire une intégration par parties :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ I_n = \int_0^1 \underbrace{x}_{u'}\underbrace{(-\ln x)^n}_{v}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}(-\ln x)^n\right]_0^1 + \frac{n}{2}\int_0^1 x(-\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x.$$

l'ipp étant justifiée car le terme entre crochets existe par croissances comparées (et vaut 0).
Ainsi, pour $n \geqslant 1$: $I_n = \dfrac{n}{2}I_{n-1}$. C'est la réponse A, qui est d'ailleurs identique à la réponse B quitte à faire un changement d'indice (? ?).

$$\boxed{\textbf{Q16 : Réponses A, B}}$$

Q17. En réitérant la formule précédente, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \frac{n}{2}I_{n-1} = \frac{n}{2}\frac{n-1}{2}I_{n-2} = \cdots = \frac{n}{2}\frac{n-1}{2}\cdots\frac{1}{2}I_0$$

soit : $I_n = \dfrac{n!}{2^n}\dfrac{1}{2} = \dfrac{n!}{2^{n+1}}\cdot$

$$\boxed{\textbf{Q17 : Réponse C}}$$

PARTIE IV

Q18. La série est facilement absolument convergente puisque son terme général est un $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ quand $n \to +\infty$.

$$\boxed{\textbf{Q18 : Réponse B}}$$

Q19.

A.B.C Si l'on note u_n le terme général de la série proposée, on a $|u_n| \leqslant \dfrac{2}{n^2}$ donc par comparaison de deux séries à termes positifs et à une série de Riemann, la série proposée est absolument convergente.
Mais ce n'est pour AUCUNE des raisons proposées : en effet,

- Le fait que le terme général d'une série tende vers 0 ne suffit pas à prouver sa convergence, donc la réponse A est fausse.
- L'équivalent de la réponse B est faux.
- La « raison » donnée à la réponse C est fantaisiste.

D. On peut calculer la somme de cette série, à condition de connaître $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$

En effet :

– $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ puis, en considérant les termes d'indices pairs et impairs :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}-\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right)\\&=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

– $\cos(n\frac{\pi}{2})$ est nul pour n impair, et pour $n=2p$, $\cos(n\frac{\pi}{2})=\cos(p\pi)=(-1)^p$ donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{n^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)^2}=\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^2}=\frac{1}{4}\left(-\frac{\pi^2}{12}\right)$$

et finalement, la somme de la série proposée vaut :

$$\left(-1+\frac{1}{4}\right)\frac{\pi^2}{12}=-\frac{3\pi^2}{48}=-\frac{\pi^2}{16}.$$

Q19 : Réponse E (aucune réponse exacte)

Q20. On fait un DL :

$$\begin{aligned}v_n\underset{n\to+\infty}{=}u_{n+1}-u_n&=\frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

donc $v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{2n^2}\cdot$ (on pouvait même se contenter de faire un DL faible et de montrer $v_n=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$).
On en déduit immédiatement :

Q20 : Réponse B

PARTIE V

Q21. Dans 4 nombres entiers consécutifs, il y en deux pairs, dont l'un est divisible par 4. Le produit est donc divisible par 8.
Il y a aussi parmi ces 4 nombres un qui est divisible par 3. Le produit est donc finalement divisible par $3\times 8=24$ (car 3 et 8 sont premiers entre eux), c'est la réponse D.
Les autres réponses sont fausses, comme le montre le calcul de $1\times 2\times 3\times 4$.

Q21 : Réponse D

Q22. Supposons que $b|(a^2+1)$.

- Si de plus $b|(a^4+1)$ alors b divise $(a^4+1)-a^2(a^2+1)=1-a^2$, puis divise $(1-a^2)+(1+a^2)=2$.
- Réciproquement, si b divise 2 alors :
  - soit $b=1$, et alors il divise a^4+1 ;
  - soit $b=2$; dans ce cas a^2+1 est pair donc a impair et a^4+1 est pair aussi, donc divisible par 2.

En conclusion :

Q22 : Réponse B

Q23. Le nombre de zéros à la fin de l'écriture décimale de $23!$ est le plus grand des entiers p tel que 10^p divise $23!$, c'est-à-dire tel que 2^p et 5^p divisent $23!$.
Comme il y a plus de multiples de 2 que de multiples de 5 dans le produit des nombres entiers entre 1 et 23, cela revient à chercher le plus grand entier p tel que 5^p divise $23!$.

Or dans le produit $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 23$ il y a, comme multiples de 5, les nombres : 5, 10, 15 et 20, donc dans la décomposition de $23!$ en facteurs premier, l'exposant de 5 est égal à 4.

Q23 : Réponse C

Q24. Soit p l'exposant de 5 dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers, et q celui de 2, de sorte que $n! = 2^q 5^p N$ où N n'est divisible ni par 2 ni par 5.
On aura donc $n! = 10^p 2^{q-p} N$; ainsi, lorsque l'on aura divisé $n!$ par 10^p, ce qui revient à enlever les zéros à droite de son écriture décimale, le nombre obtenu sera pair puisque, évidemment, $q > p$ (il y a strictement plus de facteurs 2 que de facteurs 5 dans les nombres entre 2 et n). Cela signifie que le chiffre avant ces p zéros est un nombre pair.

Q24 : Réponses A, C

Q25. On connaît l'identité remarquable :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\,(a,b) \in \mathbb{C}^2,\ a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Lorsque a et b sont deux entiers distincts, on en déduit que $a-b$ divise $a^n - b^n$,pouis que, pour $a \geqslant 2$, $a-1$ divise $a^n - 1$, et enfin que, si p divise q, alors $a^p - 1$ divise $a^q - 1$ (car si $q = pk$, $a^q = (a^p)^k$).
Ici, $21 = 3 \times 7$ donc $2^{21} - 1$ est divisible par $2^3 - 1 = 7$ et par $2^7 - 1 = 127$.
Plus précisément :

$$\begin{aligned} 2^{21} - 1 &= (2^7 - 1)(2^{14} + 2^7 + 1) = (2^7 - 1)\big(4(2^{12} - 1) + 2(2^6 - 1) + 7\big) \\ &= (2^7 - 1)(2^3 - 1)\big(4(2^9 + 2^6 + 2^3 + 1) + 2(2^3 + 1) + 1\big) \\ &= (2^7 - 1)(2^3 - 1)\big(2^4(2^7 + 2^4 + 2 + 1) + 7\big) \\ &= 127 \times 7 \times (2^4 \times 147 + 7) = 7^2 \times 127 \times (2^4 \times 21 + 1) = 7^2 \times 127 \times 337. \end{aligned}$$

Q25 : Réponse C

Q26.

Q26 : Réponse B

Q27. De même, $3^{12} - 1 - 1$ est divisible par $3^1 - 1$, $3^2 - 1$, $3^3 - 1$, $3^4 - 1$ et $3^6 - 1$, donc par $3^2 - 1$, $3^3 - 1$, $3^2 + 1$ et $3^3 + 1$, c'est-à-dire par 8, 26, 10 et 28.
On trouve donc 5 et 7 dans ses facteurs premiers.
Il ne peut évidemment pas être divisible par 3.
Il ne peut pas non plus être divisible par 11 ; en effet, si l'on calcule les congruences de 3^n modulo 11 on obtient successivement :

$$3 \equiv 3 \pmod{11}\ ,\ 3^2 \equiv 9 \pmod{11}\ ,\ 3^3 \equiv 3 \pmod{5}\ ,\ 3^4 \equiv 3 \pmod{4}\ ,\ 3^5 \equiv 1 \pmod{11}$$

ce qui permet de montrer facilement que $3^p - 1$ est divisible par 11 si et seulement si p est un multiple de 5.

Q27 : Réponses B, C

Q28. On utilisera ici une propriété bien connue de la partie entière :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n\,.$$

Notons alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, f la fonction

$$f : x \mapsto \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor\,.$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+1) = \left\lfloor \frac{\lfloor nx+n \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor + n}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + 1 \right\rfloor = f(x) + 1\,\cdot$$

Ainsi, pour connaître f, il suffit de connaître sa restriction à $[0\,;1[$.
Mais lorsque $x \in [0\,;1[$, on a $0 \leqslant nx < n$ donc $0 \leqslant \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} < 1$ d'où $f(x) = 0$.
Ainsi, f coïncide avec la fonction partie entière sur $[0\,;1[$, et puisque ces deux fonctions vérifient la relation $f(x+1) = f(x)+1$, elles sont égales sur $\mathbb{R}$.

Q28 : Réponse A

Q29. On écrit les congruences successives des puissances de 2000 modulo 7 ; sachant que $2000 = 7 \times 285 + 5$, on a

$$2000 \equiv 5 \pmod 7$$

d'où l'on tire

$$2000^2 \equiv 5^2 \equiv 4 \pmod 7$$

puis

$$2000^3 \equiv 5 \times 4 \equiv -1 \pmod 7$$

On en déduit alors $2000^6 \equiv 1 \pmod 7$.
Sachant que $1000 = 6 \times 166 + 4$, on a alors :

$$2000^{1000} = \left(2000^6\right)^{166} \times 2000^4 \equiv 2000^4 \equiv 4^2 \equiv 2 \pmod 7$$

Le reste cherché est égal à 2.

Q29 : Réponse B

PARTIE VI

Q30. Calcul sans difficulté ni intérêt (utiliser bêtement la règle de Sarrus). On trouve que $\det(A) = 2$.

Q30 : Réponse B

Q31. Notons p la projection orthogonale sur le plan P d'équation $2x - 2y + z = 0$.
On sait que la trace d'un projecteur est égale à son rang, donc $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p) = \dim(P) = 2$.
Or parmi les matrices proposées, la seule qui ait une trace égale à 2 est celle de la réponse D. Les réponses A, B, C sont donc fausses.
Il suffit donc de vérifier que la matrice proposée dans la réponse D convient (ou pas !). Pour cela, il suffit d'examiner les images des vecteurs d'une base de P : ils doivent être invariants, et l'image d'un vecteur de base de la droite $P^\perp$: ce vecteur image doit être le vecteur nul. Sachant qu'une base de P est (par exemple) formée des vecteurs de coordonnées $(1,1,0)$ et $(0,1,2)$, et qu'un vecteur normal à P a pour coordonnées $(2,-2,1)$, il suffit de calculer, avec $M = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$:

$$M\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad M\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

La matrice M est donc bien celle cherchée.

Bien sûr il existe des méthodes directes pour déterminer la matrice d'une projection orthogonale (relisez votre cours favori) mais ici, autant utiliser le résultat donné !

Q31 : Réponse D

Q32. Encore une question pa-ssio-nnan-te !

On calcule $BA = \begin{pmatrix} 2 & 28 & -25 \\ 1 & 21 & -21 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Là encore, on ne va pas s'amuser à chercher l'inverse de cette matrice ! Il suffit d'essayer celles proposées, mais on n'aura pas tous les calculs à faire puisque dès qu'un coefficient ne convient pas on arrête (pour les matrices des réponses A et B, ça coince dès le 1er coefficient en haut à gauche !).

On trouve que le produit de la matrice de la question C avec BA est bien égal à I_3.

Q32 : Réponse C

Q33. La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $M = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

On calcule alors : $\det A = 0$. La matrice A n'étant pas inversible, la famille $\{u, v, w\}$ n'est pas une base. De plus f n'est pas injectif ; pour déterminer son noyau, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs x tels que $f(x) = 0$, il suffit de résoudre le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$:

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -3a - 2b + 4c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ a + 4b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2b \\ c = -b \end{cases}$$

Il s'agit donc de la droite de base le vecteur de coordonnées $(2, -1, 1)$; celui proposée à la réponse D ne convient donc pas (il était d'ailleurs facile de vérifier directement que l'image par f du vecteur proposé ne donne pas le vecteur nul).

Q33 : Réponse B

PARTIE VII

Q34. On connaît le DSE :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

cette égalité resatnt vraie pour $x = 0$.

Puisque f admet un DSE de rayon de convergence $+\infty$, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

De plus, sa dérivée en 0 est le coefficient de x dans le DSE ci-dessus, qui vaut $\dfrac{1}{2}$.

Q34 : Réponses A, B

Q35. Lorsque $x \to +\infty$, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers 1 donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x$. Sa courbe admet donc une direction asymptotique de pente 1.

Ensuite, on fait un petit DL :

$$f(x) - x = x\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - 1\right) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = x\left(1 - \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1\right) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = -1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$.
La courbe de f a donc pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x$.

Q35 : Réponse B

Q36. Et pour finir en beauté (? ?) une équation du seconde degré dans $\mathbb{C}$.
Mais bien sûr on ne va pas s'amuser (façon de parler !) à calculer discriminant et tutti quanti... Les relations coefficients-racines donnent en effet :

$$z_1 + z_2 = -\frac{a + \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \mathrm{i}a\frac{1 - \mathrm{i}}{2(1 + \mathrm{i})} = a\frac{1 + \mathrm{i}}{2(1 + \mathrm{i})} = \frac{a}{2} \ ,$$

il suffit donc de chercher dans les solutions proposées celles qui conviennent (s'il y en a).
On trouve qu'il s'agit de la réponse A.

Q36 : Réponse A
