# Corrigé



Épreuve 2013

**Mathématiques**

(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Solutions proposés par : Francis Brunel*

# Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de Mathématiques du concours GSEA/TSEEAC 2013. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat de mon travail uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Auteur de l'ouvrage : Annales corrigées du concours GSEA/TSEEAC.

# Corrigé 2013

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | B | AC | C | BD | AC | B | AD | E | BC | D | A | B |

| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | BD | A | E | BC | AC | B | D | B | C | AD | AD |

**Question 1 : E**
Soit $x \in [-5; 5]$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1)e^{-2x} + x(x+1)(-2)e^{-2x} \\ &= e^{-2x}(2x+1-2x^2-2x) \\ &= e^{-2x}(1-2x^2) \end{aligned}$$

**Question 2 : B**
Calculons :

$$f'(0) = e^{-2\times 0}(1-2\times 0^2) = 1(1-0) = 1$$

**Question 3 : A et C**
On évalue :

$$f'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{\sqrt{2}}\left(1-2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = e^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{2}{2}\right) = 0$$

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\sqrt{2}}\left(1-2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = 0$$

Ainsi, $C_f$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**Question 4 : C**
En étudiant le signe de la dérivée de $f$ à partir des réponses précédentes, on construit le tableau suivant :

| $x$ | $-5$ | | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^{-2x}$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $1-2x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $1$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $1$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Ainsi, $f$ est croissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, décroissante sur $\left[-5; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 5\right]$.

**Question 5 : B et D**
Complétons le tableau précédent avec $\alpha$, $\beta$ et les bornes des intervalles auxquels ils appartiennent. On obtient :

| $x$ | $-5$ | $-2$ | $\beta$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $0$ | $\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $-$ | | $0$ | | $+$ | | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | | $\searrow$ | | | $0$ | $\nearrow$ | | | $\searrow$ |

On a donc :

$$f(-2) > f(\beta) > f(-1) = 0$$

De plus :

$$f(0) < f(\alpha) < f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{2}{2}} = \frac{3}{4e}$$

**Question 6 : A et C**
On évalue :

$$f(5) = 30e^{-10} > 0$$

En utilisant le tableau de variation réalisé précédemment, et en constatant que $f(5) > 0$, on peut conclure que $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[\alpha; 5]$.
De plus, en remarquant que $f(-1) = f(0) = 0$, on conclu que $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $[\beta; \alpha]$ qui sont $x = -1$ et $x = 0$.
**Question 7 : B**
Reprenons le tableau de variation agrémenté des dernières évaluations :

| $x$ | $-5$ | $-2$ | $\beta$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $0$ | $\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $-$ | | $0$ | | $+$ | | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | | | $\searrow$ $30e^{-10} > 0$ |

Ainsi, $f$ admet un minimum au point d'abscisse $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
**Question 8 : A et D**
D'après l'énoncé :

$$a_0 = b_0 = 30\,000$$

De plus, $a_9$ et $b_9$ correspondent aux sommes versées l'année 2012+9=2021.
**Question 9 : E**
En traduisant l'énoncé, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$a_{n+1} = a_n + 0,05a_n = 1,05a_n$$

$$b_{n+1} = b_n + 1750$$

**Question 10 : B et C**
D'après la question précédente, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme $a_0 = 30\,000$, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 1750, et de premier terme $b_0 = 30\,000$.

**Question 11 : D**
On a $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$a_n = 30\,000 \times (1,05)^n \Rightarrow a_1 = 31\,500$$

$$b_n = 30\,000 + 1750n \Rightarrow b_1 = 31\,750$$

Ainsi $a_1 < b_1$.
Reste maintenant à comparer $a_9$ et $b_9$. Ici, le concepteur a dû oublier que la calculatrice n'était pas autorisée. Seule solution, le calcul à la main, fastidieux. On obtient $a_9 \simeq 46\,540$ et $b_9 = 45\,750$.
Ainsi $a_9 > b_9$.
**Question 12 : A**
Soit $x$ la masse en grammes du concombre à l'arrivée. On a :

$$x = \text{masse}_{\text{eau arrivée}} + \text{masse}_{\text{solide}}$$

Et, d'après l'énoncé :

$$300 = \text{masse}_{\text{eau départ}} + \text{masse}_{\text{solide}}$$

Or :

$$\text{masse}_{\text{eau départ}} = 98\% \times 300 = 294$$
$$\Rightarrow \text{masse}_{\text{solide}} = 6$$

Et :

$$\text{masse}_{\text{eau arrivée}} = 97\% \times x$$
$$\Rightarrow \text{masse}_{\text{solide}} = 3\% \times x$$
$$\Rightarrow 6 = 3\% \times x$$
$$\Rightarrow x = 200$$

**Question 13 : B**
On a :

$$25\% \text{ des garçons en CPGE} \Rightarrow 45\ 000 \text{ garçons en CPGE}$$

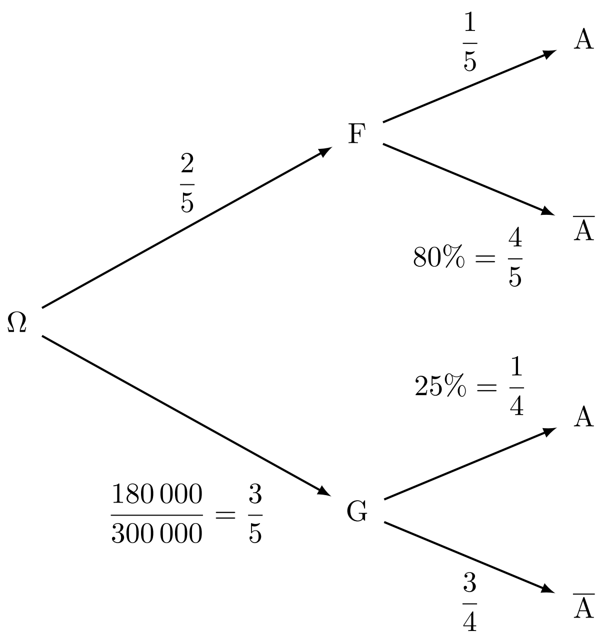
$$80\% \text{ des filles en STS} \Rightarrow 20\ \% \text{ des filles en CPGE} \Rightarrow 24\ 000 \text{ filles en CPGE}$$

Ainsi, on compte au total 69 000 élèves en CPGE.
**Question 14 : A**
On calcule :

$$\mathrm{P(G)} = \frac{180\,000}{300\,000} = \frac{3}{5}$$

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{G}}) = 1 - \mathrm{P(G)} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Construisons maintenant un arbre à partir des données précédentes :




**Question 15 : B et D**
D'après la théorie des ensembles, A∩G représente l'évènement «l'élève choisi est un garçon ET est en CPGE». De même, A∪G représente l'évènement «l'élève choisi est un garçon OU est en CPGE».

**Question 16 : A**
On a, d'après le cours tout d'abord pour la formule, et au vu des résultats présentés sur l'arbre précédemment pour les valeurs :

$$\begin{aligned} \text{P}(\text{G} \cap \text{A}) &= \text{P}(\text{G}) \times \text{P}_{\text{G}}(\text{A}) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{20} \end{aligned}$$

Attention, la proposition C est correcte mais ne répond pas à la question.

**Question 17 : E**
De même :

$$\begin{aligned} \text{P}(\text{F} \cap \text{A}) &= \text{P}(\text{F}) \times \text{P}_{\text{F}}(\text{A}) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{2}{25} \end{aligned}$$

**Question 18 : B et C**
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \text{P}(\text{A}) &= \text{P}(\text{G} \cap \text{A}) + \text{P}(\text{F} \cap \text{A}) \\ &= \frac{3}{20} + \frac{2}{25} \\ &= \frac{15 + 8}{100} \\ &= 0,23 \end{aligned}$$

**Question 19 : A et C**
On a ici :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{G} \cap \mathrm{A}) &= \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{G}) \\
\Rightarrow \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{G}) &= \frac{\mathrm{P}(\mathrm{G} \cap \mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} \\
&= \frac{3}{20} \times \frac{100}{23} \\
&= \frac{15}{23}
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{A}}) &= \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) \times \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{F}) \\
\Rightarrow \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{F}) &= \frac{\mathrm{P}(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{A}})}{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})} \\
&= \frac{\mathrm{P}(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{A}})}{1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})} \\
&= \frac{\frac{2}{5} \times \frac{4}{5}}{1 - \frac{23}{100}} \\
&= \frac{8}{25} \times \frac{100}{77} \\
&= \frac{32}{77}
\end{aligned}$$

**Question 20 : B**
Soit $x \in \left[\frac{1}{2}; 8\right]$ :

$$g'(x) = 2 - \frac{4}{x} = \frac{2x - 4}{x} = \frac{2(x-2)}{x}$$

**Question 21 : D**
D'après le résultat précédent, $g'$ s'annule en $x = 2$.
**Question 22 : B**
A partir de l'expression de $g'$ déterminée précédemment, on construit le tableau suivant :

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Ainsi, $g$ est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ et croissante sur $[2; 8]$.
**Question 23 : C**
On évalue :

$$g(1) = 2 - 3 - 4 \times 0 = -1 < 0$$

Ainsi la réponse A est éliminée.

Par ailleurs, la réponse B est éliminée d'après l'étude des variations de $g$ réalisée à la question précédente.
On évalue alors :

$$g(e^2) = 2e^2 - 3 - 4 \times 2 = 2e^2 - 11 \text{ ( } > 0 \text{ d'après la valeur de } e \text{ proposée par l'énoncé)}$$

Ainsi, on a bien, à partir des variations de $g$ et des évaluations aux points $e^2$ et 1 :

$$g(e^2) > 0 > g(1) > g(2)$$

Enfin, évaluons :

$$g(e) = 2e - 3 - 4 = 2e - 7 \text{ ( } < 0 \text{ d'après la valeur de } e \text{ proposée par l'énoncé)}$$

Ainsi, la réponse D est éliminée.

**Question 24 : A et D**

On évalue :

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 3 + 4\ln(2) = 4\ln(2) - 2 > 0$$

Ainsi, à partir des évaluations précédentes, on complète le tableau de variation suivant :

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $2$ | | $e$ | | $e^2$ | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | | | $0$ | | | $+$ | | |
| $g(x)$ | $4\ln(2)-2$ | $0$ | $-1$ | | | | $2e-7$ | $0$ | $2e^2-11$ | |

Conclusion, l'équation $g(x) = 0$ n'admet qu'une solution sur $[2; 8]$ et admet deux solutions distinctes sur J.

**Question 25 : A et D**

D'après les résultats précédents, $g'$ s'annule en $x = -2$. Ainsi $C_g$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $x = 2$, d'équation :

$$y = g(2) = 4 - 3 - 4\ln(2) = 1 - 4\ln(2)$$

Cherchons maintenant la tangente en $x = 1$. L'équation de celle ci sera du type $\{y : x \mapsto mx + p, (m, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$, avec :

$$y'(1) = g'(1) \Rightarrow m = \frac{2(1-2)}{2} = -2$$

$$y(1) = g(1) \Rightarrow m + p = -1 \Rightarrow -2 + p = -1 \Rightarrow p = 1$$

Ainsi, la droite d'équation $\{y : x \mapsto -2x + 1\}$, est tangente à $C_g$ au point d'abscisse $x = 1$.