Épreuve 2014
Mathématiques
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Solutions proposés par : Francis Brunel*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de Mathématiques du concours GSEA/TSEEAC 2014. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat de mon travail uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Auteur de l'ouvrage : Annales corrigées du concours GSEA/TSEEAC.

Corrigé 2014

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	C	A	C	AD	C	E	C	D	C	E	BC	A

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	AB	A	C	C	C	AB	C	B	E	C	D

Question 1 : A
D'après l'énoncé $u_0 = 10\,000$.
Question 2 : C
En traduisant l'énoncé, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n - 0,05u_n + 600$$
$$= 0,95u_n + 600$$

Question 3 : A
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\mathrm{v}_{n+1}}{\mathrm{v}_n} = \frac{u_{n+1} - 12\,000}{u_n - 12\,000}$$
$$= \frac{0,95u_n + 600 - 12\,000}{u_n - 12\,000}$$
$$= 0,95$$

Ainsi, $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,95$.
De plus, $\mathrm{v}_0 = u_0 - 12\,000 = -2\,000$.
Question 4 : C
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{v}_n = u_n - 12\,000$$
$$\Rightarrow u_n = \mathrm{v}_n + 12\,000 = \mathrm{v}_0 q^n + 12\,000 = -2\,000 \times 0,95^n + 12\,000$$

Question 5 : A et D
D'après l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ calculée à la question précédente, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, minorée par 10 000, majorée par 12 000.
Question 6 : C
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = -2\,000 \times 0,95^n + 12\,000 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 12\,000$$
$$\left(\text{car } 0,95 < 1 \Rightarrow 0,95^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

Question 7 : E
On a 2020 = 2013 + 7. Ainsi, le nombre d'arbres cette année là sera de :

$$u_7 = -2\,000 \times 0,95^7 + 12\,000$$

Question 8 : C
Dans toute cette partie, il faut faire attention au temps, qui sera exprimé en secondes et non en minutes.
Par définition, pour une loi exponentielle de paramètre μ, on a :

$$P(T \leqslant t) = \int_0^t \mu e^{-\mu x}\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-\mu t}$$

Ainsi, appliqué à notre cas, on a :

$$p_1 = P(T \leqslant 60) = 1 - e^{-\mu \times 60} = 1 - e^{-0{,}048}$$

Question 9 : D
De même, par calcul :

$$\begin{aligned} p_2 = P(T \geqslant 180) &= 1 - P(T \leqslant 180) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-0{,}008 \times 180}\right) \\ &= e^{-1{,}44} \end{aligned}$$

Question 10 : C
Le temps d'attente moyen correspond à l'espérance de T. Ainsi :

$$T_0 = E(T) = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,008} = \frac{1000}{8} = 125 = 2 \text{ min } 05 \text{ sec}$$

Question 11 : E
On cherche $T_1 \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\begin{aligned} &P(T > T_1) = 0,5 \\ \Leftrightarrow\ & e^{-0{,}008 \times T_1} = 0,5 \\ \Leftrightarrow\ & -0,008 \times T_1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow\ & T_1 = 125 \ln(2) \simeq 86,64 \end{aligned}$$

Ainsi, le temps médian correspond à $T_1 \simeq 86,64$ s $= 1$ min $26,64$ s. Attention à la réponse D), où il est écrit T_0 et non T_1.

Question 12 : B et C
D'après le cours, la solution générale de l'équation homogène (E_0) est $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y(x) &= Ke^{-2x},\ K \in \mathbb{R} \\ &= (2C-1)e^{-2x},\ C \in \mathbb{R} \\ &= (5C+3)e^{-2x},\ C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Question 13 : A
On cherche $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que $\{u : x \mapsto ax + b\}$ soit solution de (E). On a :

$$\begin{aligned} &\{u : x \mapsto ax+b\} \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow\ & u'(x) + 2u(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & a + 2(ax+b) = x,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & 2ax + a + 2b = x,\ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi, par identification :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2a & = & 1 \\ a + 2b & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{2} \\ b & = & -\frac{a}{2} = -\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{u : x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right\} \text{ est solution particulière de } (E).$$

Question 14 : B
D'après l'énoncé, on a φ_0 de la forme :

$$\left\{\varphi_0 : x \mapsto u(x) + y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ke^{-2x},\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

De plus,

$$\varphi_0(0) = \frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow 0 - \frac{1}{4} + Ke^0 = \frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow K = 1$$

D'où, la solution de (E) qui en 0 vaut $\frac{3}{4}$ est :

$$\left\{\varphi_0 : x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + e^{-2x}\right\}$$

Question 15 : A et B
On introduit :

$$\left\{f : x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + e^{-2x}\right\}$$

f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions naturellement définies, continues, dérivables sur $\mathbb{R}$.

Question 16 : A
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + e^{-2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
$$\left(\text{ car } e^{-2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \frac{1}{2}x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\right)$$

Question 17 : C
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + e^{-2x} = \frac{\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + 1}{e^{2x}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
$$\left(\text{ car } \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + 1\right) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ et } e^{2x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0^+\right)$$

Question 18 : C
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - 2e^{-2x}$$

Question 19 : C
Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$:

$$f'(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 2e^{-2\bar{x}} = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{-2\bar{x}} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -2\bar{x} = -\ln(4) = -2\ln(2)$$
$$\Leftrightarrow \bar{x} = \ln(2)$$

Question 20 : A et B
A l'aide des réponses aux questions précédentes, on construit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

On constate que f est décroissante sur $]-\infty; \ln(2)]$ et croissante sur $[\ln(2); +\infty[$. Attention $0 < \ln(2)$, ainsi la réponse A) est juste.
Question 21 : C
La tangente à (Γ) en 0 est une droite d'équation :

$$\{y : x \mapsto mx + p,\ (m, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

Avec :

$$y(0) = f(0) \Rightarrow p = \frac{3}{4}$$
$$y'(0) = f'(0) \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

Conclusion, l'équation de la tangente à (Γ) en 0 est la droite (T) d'équation :

$$\left\{y : x \mapsto -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right\}$$

Question 22 : B
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + e^{-2x} - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$$
$$= e^{-2x} > 0$$

Ainsi, (Γ) est au dessus de (D).
Question 23 : E
Soit $m \in]\ln(2); +\infty[$. D'après l'énoncé, on a :

$$A(m) = \int_{\ln(2)}^{m} (f(x) - y(x))\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\ln(2)}^{m} e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

Attention, la réponse C est fausse car les bornes sont inversées.
Question 24 : C
Soit $m \in]\ln(2); +\infty[$. En repartant de la réponse précédente :

$$A(m) = \int_{\ln(2)}^{m} e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-2X}\right]_{\ln(2)}^{m}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2m} + \frac{1}{2}e^{-2\ln 2}$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2m} + \frac{1}{2}e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2m} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - 2e^{-2m}\right)$$

Question 25 : D

Soit $m \in]\ln(2);+\infty[$:

$$A(m) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - 2e^{-2m}\right) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{8}$$

$$\left(\text{ car } e^{\Delta} \underset{\Delta\to-\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$