Épreuve 2015
Mathématiques
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Solutions proposés par : Francis Brunel*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de Mathématiques du concours GSEA/TSEEAC 2015. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat de mon travail uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Auteur de l'ouvrage : Annales corrigées du concours GSEA/TSEEAC.

Corrigé 2015

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B	AC	BC	A	C	A	B	BD	CD	CD	B	E	CD

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	C	A	A	A	D	BC	BD	BD	E	E	C

Question 1 : B
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Q}'(x) = -6x^2 + 6x = 6x(1-x)$$

De plus :

$$\mathrm{Q}(0) = 1$$
$$\mathrm{Q}(1) = 2$$
$$\mathrm{Q}(2) = -16 + 12 + 1 = -3$$

D'où :

x	$-\infty$		0		1		α		2		$+\infty$
$\mathrm{Q}'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\mathrm{Q}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Question 2 : A et C
Soit $x \in \left]-1\,;+\infty\right[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-1 \times \left(1+x^3\right) - (1-x)\left(3x^2\right)}{\left(1+x^3\right)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{\left(1+x^3\right)^2} \\ &= \frac{-\mathrm{Q}(x)}{\left(1+x^3\right)^2} \end{aligned}$$

x	-1		α		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

Question 3 : B et C
Soit $x \in \left]-1\,;+\infty\right[$, $x \neq 0$:

$$g(x) = \frac{1-x}{1+x^3} = \frac{\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^3} + 1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et

$$g(x) = \frac{1-x}{1+x^3} \underset{x \to -1^+}{\longrightarrow} +\infty$$

$$\left(\text{car } (1-x) \underset{x \to -1^+}{\longrightarrow} 2 \text{ et } \left(1+x^3\right) \underset{x \to -1^+}{\longrightarrow} 0^+ \right)$$

Question 4 : A
La tangente à la courbe est une fonction affine du type
$\{\Delta : x \mapsto mx + p, \text{ avec } (m, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$. On a, d'après l'énoncé :

$$g(0) = \Delta(0) \Rightarrow 1 = p$$

Et :

$$g'(0) = \Delta'(0) \Rightarrow \frac{-1}{1^2} = m$$

D'où :

$$\Delta(x) = -x + 1$$

Question 5 : C
Soit $x \in \left]-1\,;1\right[$:

$$\begin{aligned} g(x) - \Delta(x) &= \frac{1-x}{1+x^3} - (-x+1) \\ &= \frac{1 - x - (-x+1)\left(1+x^3\right)}{1+x^3} \\ &= \frac{-(-x+1)\left(1+x^3-1\right)}{1+x^3} \\ &= \frac{(x-1)\left(x^3\right)}{1+x^3} \end{aligned}$$

D'où :

x	-1		0		1
$x - 1$		$-$		$-$	
x^3		$-$	0	$+$	
$1 + x^3$		$+$		$+$	
$g(x) - \Delta(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ainsi, (Δ) est au dessous de C_g sur $\left]-1\,;0\right[$, et au dessus de C_g sur $\left]0\,;1\right[$.
Question 6 : A
Soit $x \in \left]-1\,;+\infty\right[$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} \\ &= \frac{ax^2 - ax + a + bx^2 + bx + cx + c}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (-a+b+c)x + a + c}{x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (-a+b+c)x + a + c}{x^3+1} \end{aligned}$$

Ainsi, par identification :

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ -a+b+c &= -1 \\ a+c &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b &= -a \\ -2a+c &= -1 \\ a &= 1-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b &= -a \\ 3c &= 1 \\ a &= 1-c \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{3}\,;\, b = -\frac{2}{3}\,;\, c = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \times \frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

Question 7 : B

$$\begin{aligned} G(1) &= \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{t+1} - \frac{1}{3} \times \frac{2t-1}{t^2-t+1}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{3}\Big[\ln(T+1)\Big]_0^1 - \frac{1}{3}\Big[\ln\left(T^2-T+1\right)\Big]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\ln(2) - \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{2}{3}\ln(2) \end{aligned}$$

Question 8 : B et D

On sait que $\sqrt{\Delta}$ est définie $\forall \Delta \geqslant 0$.

$$\Rightarrow \sqrt{(1-x^2)} \text{ définie } \forall x \text{ tels que } \left(1-x^2\right) \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \leqslant 1 \Rightarrow x \in [-1;1]$$

Attention, cela veut dire qu'elle est également définie sur $]-1;1[$ (car $\subset [-1;1]$).

Question 9 : C et D

Soit $x \in \,]-1\,;1[$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\sqrt{(1-x^2)} \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0\,(\neq \infty)$$

Ainsi f est dérivable en 1^-.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \frac{(1-x)}{x+1}\sqrt{(1-x^2)} \\ &= \frac{(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{x+1} \\ &= \frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+x}} \xrightarrow[x\to -1^+]{} +\infty \end{aligned}$$

$$\left(\text{car } (1-x)^{\frac{3}{2}} \xrightarrow[x\to -1^+]{} 2^{\frac{3}{2}} \text{ et } \sqrt{1+x} \xrightarrow[x\to -1^+]{} 0^+\right)$$

Ainsi f n'est pas dérivable en -1^+.

Question 10 : C et D

D'après les calculs menés à la question précédente :

C_f admet en 1 une demi-tangente horizontale.

C_f admet en -1 une demi-tangente verticale.

Il s'agit de «demi-tangente» car on se situe au bord de l'intervalle de définition de f.

Question 11 : B

Soit $x \in \,]-1\,;1[$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sqrt{(1-x^2)} + (1-x)\times(-2x)\frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)}} \\
&= -\sqrt{(1-x^2)} + \frac{(x-1)x}{\sqrt{(1-x^2)}} \\
&= \frac{-(1-x^2)+x^2-x}{\sqrt{(1-x^2)}} \\
&= \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{(1-x^2)}} \\
&= \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{(1-x^2)}}
\end{aligned}$$

Question 12 : E
On a :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$x-1$		$-$		$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{(1-x^2)}$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

De plus :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Ainsi, en $x=-\dfrac{1}{2}$, f admet un maximum qui vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.
Question 13 : C et D
On évalue :

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} \simeq \frac{3}{4}\times 1,7 = 1,215 > 1$$

On a donc $f(-1)=0<1$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)>1$, et f continue et strictement croissante sur $\left[-1;-\dfrac{1}{2}\right]$. Ainsi par application du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x)=1$ admet une unique solution sur cet intervalle. Idem sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$ où f est continue strictement décroissante. Conclusion, il existe exactement deux solutions à $f(x)=1$ sur $[-1;1]$. **Question 14 : B**
Pour une loi exponentielle de paramètre λ, on a :

$$\forall t\in\mathbb{R}^+,\ P(X\leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1-e^{-\lambda t}$$

Soit ici :

$$P(X\leqslant 5) = 1-e^{-1} \simeq 1-0,367 = 0,633 \simeq 0,63 \text{ (au centième près)}$$

Question 15 : C
La traduction de l'énoncé correspond à : «le premier guichet se libère dans les cinq minutes ET le second guichet se libère dans les cinq minutes». D'où :

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P((X_1 \leqslant 5) \cap (X_2 \leqslant 5)) \\ &= P(X_1 \leqslant 5) \times P(X_2 \leqslant 5) \text{ (car les deux lois sont indépendantes)} \\ &\simeq 0,633^2 \\ &\simeq 0,40 \text{ (au centième près)} \end{aligned}$$

Question 16 : A
Cette fois ci, la traduction de l'énoncé correspond à : «le premier guichet se libère dans les cinq minutes OU le second guichet se libère dans les cinq minutes». D'où :

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P\left((X_1 \leqslant 5) \cup (X_2 \leqslant 5)\right) \\ &= P(X_1 \leqslant 5) + P(X_2 \leqslant 5) - P((X_1 \leqslant 5) \cap (X_2 \leqslant 5)) \\ &\simeq 0,633 + 0,633 - 0,40 \\ &\simeq 0,87 \text{ (au centième près)} \end{aligned}$$

Question 17 : A
Il s'agit ici d'une autre façon de présenter le problème traité à la question précédente. Ainsi :

$$P(Z \leqslant 5) = P(E_2) \simeq 0,87 \text{ (au centième près)}$$

Question 18 : A
Soit $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} P(Z \geqslant t) &= P((X_1 \geqslant t) \cap (X_2 \geqslant t)) \\ &= P(X_1 \geqslant t) \times P(X_2 \geqslant t) \text{ (car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendants)} \\ &= e^{-\frac{t}{5}} \times e^{-\frac{t}{5}} \\ &= e^{-\frac{2t}{5}} \end{aligned}$$

Question 19 : D
D'après le résultat de la question précédente, on constate que Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{2}{5}$. Ainsi :

$$E(Z) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} = 2,5 = 2 \text{ min } 30$$

Question 20 : B et C
En traduisant directement l'énoncé, on obtient $\forall \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,9v_n + 0,2c_n \\ c_{n+1} &= 0,1v_n + 0,8c_n \end{aligned}$$

Question 21 : B et D
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,9v_n + 0,2c_n \\ &= 0,9v_n + 0,2(6 - v_n) \end{aligned}$$

$$= 0,7v_n + 1,2$$

Et :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 0,1v_n + 0,8c_n \\ &= 0,1(6 - c_n) + 0,8 \\ &= 0,6 + 0,7c_n \end{aligned}$$

Question 22 : B et D
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{v_{n+1} - 4}{v_n - 4} \\ &= \frac{0,7v_n - 2,8}{v_n - 4} \\ &= 0,7 \times \frac{v_n - 4}{v_n - 4} \\ &= 0,7 \end{aligned}$$

Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,7$.

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1}}{y_n} &= \frac{c_{n+1} - 2}{c_n - 2} \\ &= \frac{0,7c_n - 1,4}{c_n - 2} \\ &= 0,7 \end{aligned}$$

Ainsi, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,7$.
Question 23 : E
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = x_0q^n = (v_0 - 4)0,7^n = (3 - 4)0,7^n = -(0,7)^n$$
$$y_n = y_0q^n = (c_0 - 2)0,7^n = (3 - 2)0,7^n = (0,7)^n$$

Question 24 : E
D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = v_n - 4 = -(0,7)^n \Rightarrow v_n = 4 - (0,7)^n$$
$$y_n = c_n - 2 = (0,7)^n \Rightarrow v_n = 2 + (0,7)^n$$

Question 25 : C
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = 4 - (0,7)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$$
$$c_n = 2 + (0,7)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

Ainsi, le nombre de rats des villes va tendre à se stabiliser à 4 000 000, et le nombre de rats des champs va tendre à se stabiliser à 2 000 000.