Épreuve 2016
Mathématiques
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Solutions proposés par : Francis Brunel*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de Mathématiques du concours GSEA/TSEEAC 2016. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat de mon travail uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Auteur de l'ouvrage : Annales corrigées du concours GSEA/TSEEAC.

Corrigé 2016

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	D	C	B	B	C	D	E	D	B	C	D	E

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	E	D	B	AC	BC	BD	AC	AC	C	AB	AB

Question 1 : A
Ici, soit on connait les formules d'Euler qui correspondent directement aux réponses, soit on teste :

$$\begin{aligned}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} &= \frac{\cos(x)+i\sin(x)+\cos(x)+i\sin(-x)}{2} \\ &= \frac{2\cos(x)+i\sin(x)-i\sin(x)}{2} \\ &= \cos(x)\end{aligned}$$

Question 2 : D
Par le même type de manipulation, on a :

$$\begin{aligned}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} &= \frac{\cos(x)+i\sin(x)-(\cos(x)+i\sin(-x))}{2i} \\ &= \frac{i\sin(x)+i\sin(x)}{2i} \\ &= \sin(x)\end{aligned}$$

Question 3 : C
D'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}}{2} \\ &= \frac{e^{ix}+1}{2e^{i\frac{x}{2}}} \\ \Rightarrow 1+e^{ix} &= 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

Question 4 : B
De même :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}{2i} \\ &= \frac{e^{ix}-1}{2ie^{i\frac{x}{2}}} \\ \Rightarrow 1-e^{ix} &= -2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

Question 5 : B
D'après la question 3 on a :

$$\begin{aligned}\left|e^{i\frac{\pi}{3}}+1\right| &= \left|2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}\right| \\ &= 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1\end{aligned}$$

$$= \sqrt{3}$$

Et :

$$\arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+1\right) = \arg\left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$$
$$= \arg\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$$
$$= \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$$

Question 6 : C
D'après la question 4 on a :

$$\left|1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = \left|-2i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}\right|$$
$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Et :

$$\arg\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \arg\left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}\right)$$
$$= \arg\left(-2i\right)+\arg\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)$$
$$= -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$$
$$= -\frac{3\pi}{8}\,[2\pi]$$

Question 7 : D

$$\left|2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right| = 2\left|1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$$
$$= 2\left|1+e^{i\frac{\pi}{4}}\right|$$
$$= 2\left|2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}\right|$$
$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Et :

$$\arg\left(2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right) = \arg\left(2\left(1+e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right)$$
$$= \arg\left(2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}\right)$$
$$= \frac{\pi}{8}\,[2\pi]$$

Question 8 : E
Soit $\{\mathrm{P} : x \mapsto 6x^2 - x - 1\}$. On cherche x_1 et x_2 tels que $\mathrm{P}(x_1) = \mathrm{P}(x_2) = 0$. Calculons :

$$\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} = 1 - 4 \times 6 \times -1 = 25$$

D'où :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{25}}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{25}}{12} = \frac{1}{2}$$

Question 9 : D
Comme le coefficient devant x^2 est positif, on sait que P sera positive à l'extérieur de ses racines. Ainsi :

$$\mathrm{P}(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,; -\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,; +\infty\right[$$

Question 10 : B
x est tiré au hasard dans $[-1;0]$. Or, P est positive sur $\left[-1;-\frac{1}{3}\right]$, négative sur $\left[-\frac{1}{3};0\right]$. Ainsi, la probabilité que ce nombre x soit une solution de l'inéquation $\mathrm{P}(x) > 0$ est
$\dfrac{\text{Longueur}_{\left[-1;-\frac{1}{3}\right]}}{\text{Longueur}_{[-1;0]}} = \dfrac{2}{3}$.

Question 11 : C
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie partout, aucun problème avec son dénominateur. Par ailleurs, $u_0 = 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de termes positifs **ou nuls**. Enfin, $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie partout, le dénominateur de v_n ne s'annule jamais car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs ou nuls.

Question 12 : D
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{v}_{n+1}}{\mathrm{v}_n} &= \frac{\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3}}{\dfrac{u_n-1}{u_n+3}} \\
&= \frac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}+3} \times \frac{u_n+3}{u_n-1} \\
&= \frac{2u_n+3-u_n-4}{2u_n+3+3u_n+12} \times \frac{u_n+3}{u_n-1} \\
&= \frac{u_n-1}{5u_n+15} \times \frac{u_n+3}{u_n-1} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Ainsi, $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison r$=\dfrac{1}{5}$.

Question 13 : E

$$\mathrm{v}_0 = \frac{u_0-1}{u_0+3} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{v}_n = \mathrm{v}_0\mathrm{r}^n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Question 14 : D
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{v}_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$$

$$\Rightarrow \mathrm{v}_n(u_n+3) = u_n - 1$$

$$\Rightarrow u_n(\mathrm{v}_n - 1) = -1 - 3\mathrm{v}_n$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow u_n &= \frac{-1-3\mathrm{v}_n}{\mathrm{v}_n-1} \\
&= \frac{-1+\left(\frac{1}{5}\right)^n}{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n-1} \\
&= \frac{-\left(\frac{1}{5}\right)^n+1}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}
\end{aligned}$$

Question 15 : E
Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{-2n}{n+5} = \frac{-2}{1+\frac{5}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -2$$

Question 16 : D
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&|u_n+2| \leqslant 10^{-4} \\
\Leftrightarrow &\left|\frac{-2n}{n+5}+2\right| \leqslant 10^{-4} \\
\Leftrightarrow &|-2n+2(n+5)| \leqslant (n+5)10^{-4} \\
\Leftrightarrow &|10| \leqslant (n+5)10^{-4} \\
\Leftrightarrow &10^5 \leqslant n+5 \\
\Leftrightarrow &n \geqslant 10^5-5 \\
\Leftrightarrow &n \geqslant 99\,995
\end{aligned}$$

Question 17 : B
D'après l'énoncé, on doit avoir $f(0) = 220$ et f solution de l'équation différentielle. La contrainte de température initiale élimine toutes les réponses sauf la seconde. Testons si la fonction proposée vérifie l'équation différentielle. Soit $t \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = -100e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}\left[200e^{-\frac{t}{2}}+20\right] = 10$$

Ainsi, la fonction $\left\{f : t \mapsto 200e^{-\frac{t}{2}}+20\right\}$ répond au modèle.
Question 18 : A et C
Soit $t \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(t) = -100e^{-\frac{t}{2}} < 0$$

$$\Rightarrow f \text{ strictement décroissante (donc strictement monotone) sur } \mathbb{R}^+.$$

De plus, $f(0) = 220$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 20$.
Question 19 : B et C
Soit $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
&f(t) = 50 \\
\Rightarrow\ &200e^{-\frac{t}{2}}+20 = 50 \\
\Rightarrow\ &e^{-\frac{t}{2}} = \frac{3}{20}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{2} = \ln\left(\frac{3}{20}\right)$$
$$\Rightarrow t = -2\ln(0,15) \simeq 2 \times 1,89 = 3,78$$

Ainsi, la température de l'objet est de $50^{\circ}C$ au bout de $3,78$ heures environ (soit 3 heures et $0,78 \times 60 \simeq 47$ minutes).

Question 20 : B et D

Soit $x \in [-1;0]$:

$$h'(x) = e^x - 1 \leqslant 0$$

Donc h est décroissante sur $[-1;0]$. De plus, $h(0) = 0$.

x	-1 $\qquad\qquad$ 0
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	$\searrow$ 0

Ainsi, $h(x) \geqslant 0 \, \forall x \in [-1;0]$.

Question 21 : A et C

Soit $x \in [-1;0]$:

$$g'(x) = h'(x) - x = e^x - 1 - x = h(x) \geqslant 0$$

Donc g est croissante sur $[-1;0]$. De plus, $g(0) = 0$.

x	-1 $\qquad\qquad$ 0
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\nearrow$ 0

Ainsi, $g(x) \leqslant 0 \, \forall x \in [-1;0]$.

Question 22 : A et C

Soit $x \in [-1;0]$. D'après la question 20 :

$$h(x) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow e^x - 1 - x \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow 1 + x \leqslant e^x$$

D'après la question 21 :

$$g(x) \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow e^x \leqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

Question 23 : C

On pose $X = -x^2$ avec $x \in [0;1] \Rightarrow X \in [-1;0]$. On a d'après la question précédente :

$$1 + X \leqslant e^X \leqslant 1 + X + \frac{1}{2}X^2$$
$$\Leftrightarrow 1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4$$

Question 24 : A et B
Les fonctions composant l'inégalité précédente sont bien continues sur $[0;1]$. Ainsi, en intégrant sur cet intervalle, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(1-x^2\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^1 \left(1-x^2+\frac{1}{2}x^4\right)\,\mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow 1-\left[\frac{X^3}{3}\right]_0^1 \leqslant I &\leqslant 1+\left[-\frac{X^3}{3}+\frac{X^5}{10}\right]_0^1\\ \Leftrightarrow 1-\frac{1}{3} \leqslant I &\leqslant 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leqslant I &\leqslant \frac{2}{3}+\frac{1}{10}\end{aligned}$$

De plus, $\dfrac{1}{10} \leqslant \dfrac{1}{5}$, d'où :

$$\frac{2}{3} \leqslant I \leqslant \frac{2}{3}+\frac{1}{5}$$

Question 25 : A et B
En partant de la réponse A de la question précédente on a :

$$\frac{20}{30} \leqslant I \leqslant \frac{26}{30} \Leftrightarrow I \in \left[\frac{20}{30};\frac{26}{30}\right]$$

$$\Leftrightarrow I = \text{ milieu de } \left[\frac{20}{30};\frac{26}{30}\right] \text{ à } \pm \text{ moitié de la longueur de } \left[\frac{20}{30};\frac{26}{30}\right] \text{ près}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{23}{30} \text{ à } \pm\frac{1}{2}\times\left(\frac{26}{30}-\frac{20}{30}\right) \text{ près}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{23}{30} \text{ à } \pm 0,1 \text{ près}$$

En partant de la réponse B de la question précédente on a :

$$\frac{20}{30} \leqslant I \leqslant \frac{23}{30} \Leftrightarrow I \in \left[\frac{20}{30};\frac{23}{30}\right]$$

$$\Leftrightarrow I = \text{ milieu de } \left[\frac{20}{30};\frac{23}{30}\right] \text{ à } \pm \text{ moitié de la longueur de } \left[\frac{20}{30};\frac{23}{30}\right] \text{ près}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{43}{60} \text{ à } \pm\frac{1}{2}\times\left(\frac{23}{30}-\frac{20}{30}\right) \text{ près}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{43}{60} \text{ à } \pm 0,05 \text{ près}$$