Corrigé

Épreuve initiale 2017
Mathématiques
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Solutions proposés par : Francis Brunel*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve initiale de Mathématiques du concours GSEA/TSEEAC 2017. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat de mon travail uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Auteur de l'ouvrage : Annales corrigées du concours GSEA/TSEEAC.

Corrigé 2017 (épreuve initiale)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D	B	AC	D	B	A	A	C	A	E	C	CD	D

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
E	C	CD	C	D	D	A	BC	E	B	C	A

Question 1 : D
g est le quotient de fonctions naturellement définies sur $\mathbb{R}$ et son dénominateur ne s'annule jamais, ainsi $D_g = \mathbb{R}$.
Question 2 : B
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 - \frac{4e^x\left(e^{2x}+1\right) - 4e^x \times 2e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\ &= -\frac{4e^{3x} + 4e^x - 8e^{3x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\ &= \frac{4e^{3x} - 4e^x}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\ &= 4e^x \frac{e^{2x}-1}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \end{aligned}$$

Question 3 : A et C
On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} g'(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow 4e^\alpha \frac{e^{2\alpha}-1}{\left(e^{2\alpha}+1\right)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2\alpha} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2\alpha} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2\alpha = \ln(1) \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}\ln(1) = 0 \end{aligned}$$

Question 4 : D
On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\alpha = 0$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ainsi, g est décroissante sur D_g pour $x \leqslant \alpha$, puis croissante pour $x \geqslant \alpha$.
Question 5 : B
On introduit :

$$\{h : x \mapsto e^x - x\}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = e^x - 1$$

$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

On en déduit le tableau suivant :

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -\infty & & 0 & & +\infty \\
\hline
h'(x) & & - & 0 & + & \\
\hline
h(x) & & \searrow & & \nearrow & \\
\hline
\end{array}$$

De plus, $h(0) = 1 - 0 = 1$. D'où $h \geqslant 1$ sur $\mathbb{R}$.

Question 6 : A

f est le quotient de fonctions naturellement définies sur $\mathbb{R}$, et son dénominateur ne s'annule jamais d'après la réponse précédente, ainsi $D_f = \mathbb{R}$.

Question 7 : A

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x \\
&= \frac{e^x - 1 - x\left(e^x - x\right)}{e^x - x} \\
&= \frac{e^x - x - 1 - x\left(e^x - x - 1\right)}{e^x - x} \\
&= \frac{(1 - x)\left(e^x - x - 1\right)}{e^x - x}
\end{aligned}$$

Question 8 : C

D'après l'énoncé, l'heure d'achat suit une loi uniforme sur $[16; 16,5]$. Ainsi, d'après le cours, la densité de probabilité est telle que :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 16 \\ \dfrac{1}{16,5 - 16} = 2 & \text{si } 16 \leqslant t \leqslant 16,5 \\ 0 & \text{si } t > 16,5 \end{cases}$$

Question 9 : A

On a :

$$\begin{aligned}
p_1 &= \mathrm{P}\left(16\text{h}20 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 16\text{h}30\right) \\
&= \mathrm{P}\left(16 + \frac{1}{3} \leqslant \mathrm{T} \leqslant 16 + \frac{1}{2}\right) \\
&= \int_{16+\frac{1}{3}}^{16+\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[2T\Big]_{16+\frac{1}{3}}^{16+\frac{1}{2}} \\
&= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Question 10 : E

On a :

$$p_2 = \mathrm{P}_{\mathrm{T} \geqslant 16\text{h}15}\left(16\text{h}20 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 16\text{h}30\right)$$

$$= \frac{P\left((16h20 \leqslant T \leqslant 16h30) \cap (T \geqslant 16h15)\right)}{P(T \geqslant 16h15)}$$
$$= \frac{P(16h20 \leqslant T \leqslant 16h30))}{P(T \geqslant 16h15)}$$
$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{2}{3}$$

Question 11 : C
On calcule l'espérance, qui pour cette loi uniforme sur $[16; 16,5]$ vaut :

$$E = \frac{16,5 - 16}{2} = 16,25 = 16h15$$

Question 12 : C et D
D'après le cours, les solutions générales de cette équation homogène sont de la forme :

$$\{y : x \mapsto C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\,,\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

ou :

$$\{y : x \mapsto C \cos(2x + b)\,,\ (C, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

Car $\forall x, C, b \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$C \cos(2x + b) = C \cos(2x)\cos(b) - C \sin(2x)\sin(b)$$
$$= C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$
$$\text{avec } C_1 = C\cos(b) \text{ et } C_2 = -C\sin(b)$$

Les deux propositions sont équivalentes.

Question 13 : D
Vu le second ordre dans l'équation différentielle, on tente une solution particulière en polynôme du second degrès. On introduit :

$$\left\{u : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\right\}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$u''(x) + 4u(x) = \frac{2}{4} - 0 + \frac{4}{4}x^2 - \frac{4}{8} = x^2$$

Ainsi, $\left\{u : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\right\}$ est bien solution particulière de (E).

Question 14 : E
On a, d'après l'énoncé et les réponses précédentes, la solution de l'équation de la forme :

$$\left\{\varphi : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\,,\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\right\}$$

Or :

$$\varphi_0(0) = \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow 0 - \frac{1}{8} + C_1\cos(0) + C_2\sin(0) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Et :

$$\varphi_0'(0) = 1$$
$$\Rightarrow \frac{2}{4} \times 0 - 2C_1 \sin(0) + 2C_2 \cos(0) = 1$$
$$\Rightarrow 2C_2 = 1$$
$$\Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$$

Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + \frac{7}{8}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Question 15 : C
D'après l'énoncé :

$$D_1 = D_0 - 20\% D_0$$
$$= 300 - 0,2 \times 300$$
$$= 240$$

Question 16 : C et D
En traduisant l'énoncé, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$D_{n+1} = D_n - 20\% D_n = 0,8 D_n$$

Question 17 : C
D'après la réponse précédente, $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0,8. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$D_n = D_0 \times (0,8)^n = 300 \times (0,8)^n$$

Question 18 : D
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$D_n = 300 \times (0,8)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\left(\text{car } 0,8 < 1 \Rightarrow 0,8^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

Question 19 : D
On calcule la somme d'une suite géométrique (attention $D_0 = 1^{er}$ Juin $\Rightarrow D_{29} = 30$ Juin) :

$$V = \sum_{k=0}^{29} D_k$$
$$= D_0 \frac{1 - (0,8)^{29+1}}{1 - 0,8}$$
$$= 300 \frac{1 - (0,8)^{30}}{0,2}$$

Question 20 : A
D'où :

$$\begin{aligned}V &\simeq 300\frac{1-1,24\times 10^{-3}}{0,2}\\ &\simeq 1500\left(1-1,24\times 10^{-3}\right)\\ &\simeq 1500-1,5\times 1,24\\ &\simeq 1500-1,86\\ &\simeq 1498,14\end{aligned}$$

Question 21 : B et C
Soit $x \in [2;4]$. On a évidemment :

$$f(x)=\frac{2x-4}{(2x-3)^2}=\frac{2x-5}{(2x-3)^2}+\frac{1}{(2x-3)^2}$$

De plus, soit $a, b \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned}&\frac{a}{(2x-3)^2}+\frac{b}{2x-3}=f(x)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{a+b(2x-3)}{(2x-3)^2}=f(x)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{2bx+a-3b}{(2x-3)^2}=f(x)\end{aligned}$$

D'où, par identification :

$$\begin{aligned}&2b=2\,,\ a-3b=-4\\ \Rightarrow\ &b=1\,,\ a=-4+3b=-1\\ \Rightarrow\ &f(x)=\frac{1}{2x-3}-\frac{1}{(2x-3)^2}\end{aligned}$$

Question 22 : E
A partir de la réponse précédente, on détermine que les primitives F de f sont de la forme, $\forall x \in [2;4]$:

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln(2x-3)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2x-3}+C,\ C\in\mathbb{R}$$

Question 23 : B
En intégrant f naturellement continue sur $[2;4]$, on obtient :

$$\begin{aligned}I &= \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\int_2^4\left(\frac{1}{2x-3}-\frac{1}{(2x-3)^2}\right)\,\mathrm{d}x\\ &=\left[\frac{1}{2}\ln\left(2X-3\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2X-3}\right]_2^4\\ &=\frac{1}{2}\ln(8-3)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{8-3}-\left(\frac{1}{2}\ln(4-3)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4-3}\right)\\ &=\frac{1}{2}\ln(5)+\frac{1}{10}-0-\frac{1}{2}\\ &=\ln\left(\sqrt{5}\right)-\frac{2}{5}\end{aligned}$$

Question 24 : C
Avec le résultat de la question précédente et à l'aide des données proposées, on évalue :

$$\begin{aligned} I &= \ln\left(\sqrt{5}\right) - \frac{2}{5} \\ &\simeq \frac{1}{2} \times 1,61 - \frac{2}{5} \\ &\simeq 0,805 - 0,4 \\ &\simeq 0,405 \end{aligned}$$

Question 25 : A
Par définition de la valeur moyenne sur un segment, on a :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4-2}\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}I \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\sqrt{5}\right) - \frac{2}{5}\right) \\ &= \ln\left(5^{\frac{1}{4}}\right) - \frac{1}{5} \end{aligned}$$