Épreuve de remplacement 2017
Mathématiques
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Solutions proposés par : Francis Brunel*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de remplacement de Mathématiques du concours GSEA/TSEEAC 2017. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat de mon travail uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Auteur de l'ouvrage : Annales corrigées du concours GSEA/TSEEAC.

Corrigé 2017 (épreuve de remplacement)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	BD	B	A	C	E	E	C	A	E	BC	D	D

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	A	E	AC	C	AB	D	B	B	E	C	D

Question 1 : A
Par définition, l'écriture exponentielle d'un complexe z, si elle existe, est de la forme : $\{z = re^{i\theta}\}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Question 2 : B et D
L'écriture exponentielle n'existe que pour les complexes non nuls d'après la définition précédente. Pour justifier la réponse D, on a par définition :

$$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$$

Question 3 : B

$$\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2i\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) &= \frac{2i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{i} \\
&= \frac{-2\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)}{e^{i\frac{\pi}{2}}} \\
&= -2e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{7}} \\
&= -2e^{-i\frac{7\pi}{14}}e^{-i\frac{2\pi}{14}} \\
&= -2e^{-i\frac{9\pi}{14}} \\
&= 2e^{i\frac{5\pi}{14}}
\end{aligned}$$

Question 4 : A

$$\begin{aligned}
\frac{-2\sqrt{3} + 2i}{(1+i)^4} &= \frac{-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{(\sqrt{2})^4 e^{i\frac{4\pi}{4}}} \\
&= -\frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\pi}} \\
&= e^{-i\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}$$

Question 5 : C

$$\begin{aligned}
\frac{i(1+i)^3}{(\sqrt{3}-i)^5} &= \frac{\sqrt{2}^3 e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2^5 e^{-i\frac{5\pi}{6}}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2^4} e^{i\frac{(6\pi+9\pi+10\pi)}{12}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{16} e^{i\frac{\pi}{12}}
\end{aligned}$$

Question 6 : E

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (1+i)(1-i\sqrt{3}) \\ &= 1 - i\sqrt{3} + i + \sqrt{3} \\ &= 1 + \sqrt{3} + i(1-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Question 7 : E

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}} \end{aligned}$$

Question 8 : C
D'après la question précédente :

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \\ &= 1 + \sqrt{3} + i(1-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

D'où :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Question 9 : A
D'après le cours, les solutions de l'équation $y^{'} + ay = 0$ sont de la forme $\{f(x) = ke^{-ax}, k \in \mathbb{R}\}$.
D'où ici :

$$S_{(E)} = \left\{f : x \mapsto ke^{2x}, k \in \mathbb{R}\right\}$$

Question 10 : E
D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned} f(1) = -2 &\Rightarrow ke^2 = -2 \\ &\Rightarrow k = -\frac{2}{e^2} \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\frac{2}{e^2}e^{2x} = -2e^{2x-2} \end{aligned}$$

Question 11 : B et C
La fonction $\{k : x \mapsto 2e^x\}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction $\{g : x \mapsto 2x - 2\}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
La composée de deux fonctions strictement croissantes est strictement croissante.
D'où $\left\{h : x \mapsto 2e^{2x-2}\right\}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
L'opposée d'un fonction strictement croissante est strictement décroissante.
Ainsi $\left\{f : x \mapsto -2e^{2x-2}\right\}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Et :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Ainsi, C admet l'axe des abscisses comme asymptote en $-\infty$.
Question 12 : D

D'après le cours, les solutions de l'équation $y' + ay = b$ sont de la forme :

$$\{g : x \mapsto ke^{-ax} + l, k \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}\}$$

Donc ici, les solutions de l'équation (E') sont de la forme :

$$\left\{g : x \mapsto ke^{2x} + l, k \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}\right\}$$

D'après l'énoncé :

$$g'(1) = 1 \Rightarrow 2ke^2 = 1$$
$$\Rightarrow k = \frac{1}{2}e^{-2}$$

Mais g satisfait (E'), d'où $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = 2g(x) + 4$$
$$\Rightarrow 2ke^{2x} = 2(ke^{2x} + l) + 4$$
$$\Rightarrow 0 = 2l + 4$$
$$\Rightarrow l = -2$$

Ainsi, la solution de l'équation (E') dont la courbe representative possède une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$ en son point d'abscisse 1 est :

$$S_{(E')} = \left\{g : x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x-2} - 2\right\}$$

Question 13 : D
La fonction φ vérifie (E"), ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\varphi'(x) = 2\varphi(x) + 4x + 6 + \frac{1}{x} - 2\ln(x)$$
$$\Rightarrow a + \frac{1}{x} = 2ax + 2b + 2\ln(x) + 4x + 6 + \frac{1}{x} - 2\ln(x)$$
$$\Rightarrow a = 2ax + 2b + 4x + 6$$
$$\Rightarrow (x = 0)\, a = 2b + 6, (x = 1)\, a = 2a + 2b + 10$$
$$\Rightarrow a = -2, b = -4$$

Question 14 : C
On a :

$$h - \varphi \text{ solution de (E)}$$
$$\Leftrightarrow h(x) - \varphi(x) = ke^{2x}, k \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow h(x) = -2x - 4 + \ln(x) + ke^{2x}, k \in \mathbb{R}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E") est :

$$S_{(E'')} = \left\{h : x \mapsto -2x - 4 + \ln(x) + ke^{2x}, k \in \mathbb{R}\right\}$$

Question 15 : A
D'après l'énoncé :

$$\psi(1) = -2$$

$$\Rightarrow -2-4+0+ke^2=-2$$
$$\Rightarrow k=4e^{-2}$$
$$\Rightarrow \psi(x)=-2x-4+\ln(x)+4e^{2x-2}$$

Question 16 : E
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n = 2(n+1)^2-13(n+1)+1-2n^2+13n-1$$
$$= 4n-11\,(>0\,\forall n \geqslant 3)$$

D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante $\forall n \geqslant 3$ seulement.
Question 17 : A et C
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{(2n+3)e^{n+1}}{(2n+1)e^n}$$
$$=\underbrace{\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}_{>1}\underbrace{e}_{>1}$$
$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n}>1$$

Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante $\forall n \in \mathbb{N}$.
Question 18 : C
Démonstration lourde (mais juste). Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1}-w_n = n+1-\ln(1+n^2+2n+1)-n+\ln(1+n^2)$$
$$=1-\ln\left(1+\frac{2n+1}{1+n^2}\right)$$

On remarque que $\forall n \geqslant 3$:

$$\frac{2n+1}{1+n^2}<1$$

De plus, pour n=2 :

$$\frac{2\times 2+1}{1+2^2}=1$$

Pour n=1 :

$$\frac{2\times 1+1}{1+1^2}=\frac{3}{2}$$

Pour n=0 :

$$\frac{2\times 0+1}{1+0^2}=1$$

Ainsi dans tous les cas :

$$\frac{2n+1}{1+n^2}\leqslant\frac{3}{2}$$

D'où :

$$w_{n+1}-w_n \geqslant 1-\ln\underbrace{\left(1+\frac{3}{2}\right)}_{<\mathrm{e}}>1-\ln(e)=0$$

Ainsi, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante $\forall n \in \mathbb{N}$.
Démonstration plus légère (à privilégier). Soit la fonction :

$$\left\{w : x \mapsto x-\ln\left(1+x^2\right)\right\} \text{ où } \mathcal{D}_w=\mathbb{R}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} w'(x) &= 1 - \frac{2x}{1+x^2} \\ &= \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} \\ &= \frac{(x-1)^2}{1+x^2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\left\{w : x \mapsto x - \ln\left(1+x^2\right)\right\}$ est strictement croissante sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_w = \mathbb{R}$ (la dérivée s'annule en 1 mais ne change pas de signe).
Or, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la restriction de la fonction aux entiers naturels.
Conclusion, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante $\forall n \in \mathbb{N}$.

Question 19 : A et B

On remarque directement que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée (elle change de signe à chaque indice) à partir de $n = 3$. Elle n'est donc pas monotone (croissante ou décroissante), encore moins strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante).

Question 20 : D

Par expérience, y_{n+1} s'exprimant en fonction de y_n dans l'énoncé, il est probable que l'on utilise une récurrence pour traiter cette question. Calculons y_1 :

$$y_1 = e^{2-2} = 1$$

Comme $y_1 < y_0$, la proposition sera la suivante :

$$\{H_n : y_{n+1} < y_n\}$$

Vérifions :

$$H_0 : y_1 < y_0$$

Oui, c'est vrai, on l'a vu au dessus. On suppose maintenant H_n vraie.

$$H_n : y_{n+1} < y_n$$

On applique la fonction $\{g : x \mapsto e^{x-2}\}$, définie sur $\mathbb{R}$, à l'inégalité précédente. La fonction étant évidemment strictement croissante sur $\mathbb{R}$, le sens de l'inégalité, ainsi que son caractère strict seront conservés. On obtient :

$$e^{y_{n+1}-2} < e^{y_n-2}$$

$$\Leftrightarrow y_{n+2} < y_{n+1} : H_{n+1}$$

La récurrence est donc vérifiée. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} < y_n$. Conclusion, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante $\forall n \in \mathbb{N}$.

Question 21 : B

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 + 2\pi\cos(2\pi x)$$

Or, $f'(0) = 1 > 0$ et $f'(0,5) = 1 - 2\pi < 0$: f' n'est pas de signe constant, ainsi la fonction f n'est pas monotone.
En revanche, soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= (n+1) + 2\pi\sin(2\pi(n+1)) - n - 2\pi\sin(2\pi n) \\ &= (n+1) + 2\pi \times 0 - n - 2\pi \times 0 \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

Conclusion, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante $\forall n \in \mathbb{N}$.

Question 22 : B

$$\begin{aligned}
&f \text{ définie une loi de densité sur l'intervalle } [0;4]\\
&\Leftrightarrow \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 1\\
&\Leftrightarrow \int_0^4 \left(ax + \frac{1}{5}\right)\,\mathrm{d}x = 1\\
&\Leftrightarrow \frac{4}{5} + a\left[\frac{1}{2}X^2\right]_0^4 = 1\\
&\Leftrightarrow \frac{4}{5} + 8a = 1\\
&\Leftrightarrow 8a = \frac{1}{5}\\
&\Leftrightarrow a = \frac{1}{40}
\end{aligned}$$

Question 23 : E

$$\begin{aligned}
P(X \leqslant 1) &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{40}\left[\frac{1}{2}X^2\right]_0^1 + \frac{1}{5}\\
&= \frac{1}{80} + \frac{1}{5}\\
&= \frac{1}{80} + \frac{16}{80}\\
&= \frac{17}{80}
\end{aligned}$$

Question 24 : C

$$\begin{aligned}
P(X \geqslant 2) &= \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{40}\left[\frac{1}{2}X^2\right]_2^4 + \frac{2}{5}\\
&= \frac{6}{40} + \frac{2}{5}\\
&= \frac{6}{40} + \frac{16}{40}\\
&= \frac{11}{20}
\end{aligned}$$

Question 25 : D

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{2} \leqslant X \leqslant 3\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^3 f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{40}\left[\frac{1}{2}X^2\right]_{\frac{1}{2}}^3 + \frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{80}\left(9 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{80} \times \frac{35}{4} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{7}{64} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{39}{64}$$