Corrigé

Épreuve 2018
Mathématiques
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Solutions proposés par : Francis Brunel*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de Mathématiques du concours GSEA/TSEEAC 2018. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat de mon travail uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Auteur de l'ouvrage : Annales corrigées du concours GSEA/TSEEAC.

Corrigé 2018

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	BC	B	D	D	C	D	E	B	A	D	B	AC

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
E	C	D	BC	B	A	C	A	D	E	B	C

Question 1 : A
Soit $z \in \mathbb{C}$. Tout d'abord, pour que le dénominateur de z' soit différent de 0 et ainsi que z' soit défini, on doit avoir $z \neq i$. Puis :

$$\begin{aligned} z' &= \frac{2\overline{z}}{\overline{z}+i} \\ &= \frac{2\overline{z}}{\overline{z-i}} \\ &= \frac{2\overline{z}}{\overline{z-i}} \times \frac{z-i}{z-i} \\ &= \frac{2\overline{z}(z-i)}{|z-i|^2} \\ &= \frac{2(x-iy)(x+iy-i)}{|z-i|^2} \\ &= \frac{2(x^2+iyx-ix-iyx+y^2-y)}{|z-i|^2} \\ &= \frac{2(x^2+y^2-y-ix)}{|z-i|^2} \end{aligned}$$

Le dénominateur est réel. Le numérateur est réel, uniquement dans le cas où $x=0$, c'est à dire dans le cas où z est un imaginaire pur.
Conclusion, z' est réel si et seulement si z est un imaginaire pur, différent de i.
Question 2 : B et C
Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i$:

$$\begin{aligned} |z'-2| &= \left|\frac{2\overline{z}}{\overline{z}+i} - 2\right| \\ &= \left|\frac{2\overline{z}-2(\overline{z}+i)}{\overline{z}+i}\right| \\ &= \frac{|-2i|}{|\overline{z}+i|} \\ &= \frac{2}{|\overline{z}+i|} \\ &= \frac{2}{|\overline{z-i}|} \\ &= \frac{2}{|z-i|} \end{aligned}$$

Question 3 : B
Par définition de l'argument, $\arg(Z)$ existe si et seulement si $Z \neq 0$.
Cherchons alors, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i$, tel que :

$$\begin{gathered}\arg(z'-2) \text{ n'existe pas}\\ \Leftrightarrow z'-2=0\\ \Leftrightarrow \frac{-2i}{\overline{z}+i}=0\\ \Leftrightarrow -2i=0\\ \text{absurde}\end{gathered}$$

Ainsi, $\arg(z'-2)$ existe pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.
Rigoureusement, cela signifie que $\arg(z'-2)$ existe également pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, 2\}$ ou $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, 2, -i\}$, puisque ces ensembles sont des sous ensembles de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.
Mais dans ce cas, cela signifierait que 3 réponses (B, C et D) sont justes, alors que les consignes de l'énoncé indiquent : «Chaque question comporte au plus deux réponses exactes». Je prends le parti de considérer ici comme unique réponse juste l'ensemble de définition de $\arg(z'-2)$.
Question 4 : D
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$:

$$\begin{aligned}\arg(z'-2) &= \arg\left(\frac{-2i}{\overline{z}+i}\right)\\ &= \arg(-2i) - \arg(\overline{z}+i)\\ &= \arg(-2i) - \arg(\overline{z-i})\\ &= \arg(-2i) + \arg(z-i)\\ &= -\frac{\pi}{2} + \arg(z-i) \quad [2\pi]\end{aligned}$$

Question 5 : D
On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{1-i} &= \frac{2\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}\\ &= 2\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}\\ &= 2\times\frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}\\ &= 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}\\ &= 2e^{i\left(\frac{3\pi-2\pi}{12}\right)}\\ &= 2e^{i\frac{\pi}{12}}\end{aligned}$$

Question 6 : C
D'après le résultat précédent :

$$\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2024} = \left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{2024}$$

En posant la division euclidienne de 2024 par 12 on obtient :

$$2024 = 168 \times 12 + 8$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{2024} &= 2^{2024}e^{i\frac{(168\times 12+8)\pi}{12}} \\ &= 2^{2024}e^{i\left(168\pi+\frac{2\pi}{3}\right)} \\ &= 2^{2024}e^{i168\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &= 2^{2024}e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &= 2^{2024}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2^{2023}(-1+i\sqrt{3})\end{aligned}$$

Question 7 : D
On calcule les longueurs :

$$\begin{aligned}\text{AB} &= \sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2} \\ &= \sqrt{(-1-1)^2+(-1-\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{4+1+3+2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{8+2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{BC} &= \sqrt{(x_c-x_b)^2+(y_c-y_b)^2} \\ &= \sqrt{(-(2+\sqrt{3})+1)^2+(1+1)^2} \\ &= \sqrt{1+3+2\sqrt{3}+4} \\ &= \sqrt{8+2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{CA} &= \sqrt{(x_a-x_c)^2+(y_a-y_c)^2} \\ &= \sqrt{(1+(2+\sqrt{3}))^2+(\sqrt{3}-1)^2} \\ &= \sqrt{9+3+6\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{16+4\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Ainsi, ABC est bien isocèle en B. De plus :

$$\text{AB}^2+\text{BC}^2 = 8+2\sqrt{3}+8+2\sqrt{3} = 16+4\sqrt{3} = \text{CA}^2$$

Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.
Question 8 : E
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln\left(2^n u_n\right) = n$$

$$\Leftrightarrow 2^n u_n = e^n$$
$$\Leftrightarrow u_n = \left(\frac{e}{2}\right)^n$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{e}{2}$. De plus :

$$u_0 = \left(\frac{e}{2}\right)^0 = 1$$

Question 9 : B
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \left(\frac{e}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
$$\left(\text{car } \frac{e}{2} > 1\right)$$

Question 10 : A
On rappelle que la somme d'une suite géométrique $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r vaut, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{v}_k = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{v}_0 r^k = \mathrm{v}_0 \sum_{k=0}^{n} r^k = \mathrm{v}_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Appliqué à notre cas, on obtient :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
$$= \frac{1-\left(\frac{e}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{e}{2}}$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{2^{n+1}-e^{n+1}}{1-\frac{e}{2}}$$
$$= \frac{1}{2^n} \times \frac{2^{n+1}-e^{n+1}}{2-e}$$

Question 11 : D
D'après le résultat de la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{e}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{e}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
$$\left(\text{car } e > 2 \Rightarrow \left(1-\left(\frac{e}{2}\right)^{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \;\text{ et }\; \left(1-\frac{e}{2}\right) < 0\right)$$

Question 12 : B
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \geqslant 10^3 \Leftrightarrow \left(\frac{e}{2}\right)^n \geqslant 10^3$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{e}{2}\right)^n\right) \geqslant \ln\left(10^3\right)$$

$$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{e}{2}\right) \geqslant 3\ln(10)$$

$$\Leftrightarrow n\left(\ln(e)-\ln(2)\right) \geqslant 3\ln(10)$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{3\ln(10)}{\ln(e)-\ln(2)}$$

On remarque que le sens de l'inégalité est conservé entre la première et la deuxième ligne de calcul, justifié par la composition avec ln, qui est une fonction croissante. Par ailleurs, le sens de l'inégalité est conservé entre l'avant dernière et la dernière ligne de calcul, car on divise par une valeur positive (car $e > 2$).

Question 13 : A et C

Soit $n \in \mathbb{N}$:

En traduisant l'énoncé, on obtient :

$$\mathrm{v}_n = 9 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

$(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{10} = 0,1$ et de premier terme $\mathrm{v}_0 = 9$.

Question 14 : E

En appliquant la formule générale rappelée au cours de la réponse à la question 10, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{v}_k \\
&= 9 \times \frac{1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{1}{10}\right)} \\
&= 10 \times 9 \times \frac{1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n+1}}{10-1} \\
&= 10 \times \left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right] \\
&= 10-\left(\frac{1}{10}\right)^n
\end{aligned}$$

Question 15 : C

D'après l'énoncé «v= $9,999...$ qui s'écrit dans le système décimal de position à l'aide d'un 9, d'une virgule et d'une <u>infinité</u> de 9 après la virgule». Ainsi, v peut être vue comme la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = 10-\left(\frac{1}{10}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 10 = \mathrm{v}$$

$$\left(\text{ car } \frac{1}{10} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

Question 16 : D

Soit le polynôme $P(X) = 2X^3 + 11X^2 - 20X + 7$. On teste les racines proposées en réponses :

$$P(1) = 2 + 11 - 20 + 7 = 0$$
$$P(-1) = -2 + 11 + 20 + 7 = 36 \neq 0$$

Ainsi, 1 est bien racine de P. Alors, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X-1)(aX^2 + bX + c) \\ &= aX^3 + bX^2 + cX - aX^2 - bX - c \\ &= aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c \end{aligned}$$

Ainsi, par identification :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 2 \\ b-a &=& 11 \\ c-b &=& -20 \\ -c &=& 7 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 2 \\ b &=& 11+a \\ b &=& 20+c \\ c &=& -7 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 2 \\ b &=& 13 \\ c &=& -7 \end{array} \right.$$

Conclusion :

$$P(X) = (X-1)(2X^2 + 13X - 7)$$

Question 17 : B et C
On calcule, ou on connait par coeur :

$$13^2 = (10+3)^2 = 10^2 + 60 + 3^2$$
$$15^2 = (10+5)^2 = 10^2 + 100 + 5^2 = 225$$

Question 18 : B
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (E_1) &\Leftrightarrow 2x^3 + 11x^2 - 20x + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 13x - 7) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 2x^2 + 13x - 7 = 0 \end{aligned}$$

Cherchons les racines du polynôme $Q(X) = 2X^2 + 13X - 7$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 169 + 56 = 225 = 15^2$$

Ainsi les racines de Q sont :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13 - \sqrt{15^2}}{4} = \frac{-28}{4} = -7$$
$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13 + \sqrt{15^2}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Conclusion, les solutions de (E_1) sont : $S_1 = \left\{ \frac{1}{2}, 1, -7 \right\}$.

Question 19 : A
Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned} (E_2) &\Leftrightarrow 2\left(\ln(x)\right)^3 + 11\left(\ln(x)\right)^2 - 20\ln(x) + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2X^3 + 11X^2 - 20X + 7 = 0 \text{ où } X = \ln(x) \end{aligned}$$

D'où, d'après le résultat de la question précédente :

$$(E_2) \Leftrightarrow X = \frac{1}{2} \text{ ou } X = 1 \text{ ou } X = -7$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \text{ ou } \ln(x) = 1 \text{ ou } \ln(x) = -7$$
$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \text{ ou } x = e \text{ ou } x = e^{-7}$$

Conclusion, les solutions de (E_2) sont : $S_2 = \Big\{e, e^{-7}, \sqrt{e}\Big\}$.

Question 20 : C

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_3) \Leftrightarrow 2e^{3x} + 11e^{2x} - 20e^x + 7 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2X^3 + 11X^2 - 20X + 7 = 0 \text{ où } X = e^x$$

D'où, d'après le résultat de la question 18 :

$$(E_3) \Leftrightarrow X = \frac{1}{2} \text{ ou } X = 1 \text{ ou } X = -7$$
$$\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \text{ ou } e^x = 1 \text{ ou } e^x = -7$$

Or, $\{e : x \mapsto e^x\}$ est positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi les deux seules solutions envisageables sont :

$$e^x = \frac{1}{2} \text{ ou } e^x = 1$$
$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \text{ ou } x = \ln(1) = 0$$

Conclusion, les solutions de (E_3) sont : $S_3 = \Big\{0, -\ln(2)\Big\}$.

Question 21 : A

D'après le cours, les solutions de cette équation (F) sont de la forme :

$$\{f : x \mapsto C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\,,\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

Avec ici :

$$f(0) = \sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow C_1 \cos(2 \times 0) + C_2 \sin(2 \times 0) = \sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow C_1 = \sqrt{3}$$

Et :

$$f'(0) = 2$$
$$\Leftrightarrow -2C_1 \sin(2 \times 0) + 2C_2 \cos(2 \times 0) = 2$$
$$\Leftrightarrow C_2 = 1$$

Ainsi, la fonction f solution de l'équation (F) satisfaisant aux conditions initiales $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 2$ est :

$$\Big\{f : x \mapsto \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x)\Big\}$$

Question 22 : D
En évaluant les quatre propositions de l'énoncé en 0, seule la dernière respecte l'exigence $f(0) = \sqrt{3}$.
On utilise alors les formules trigonométriques pour développer l'expression proposée. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) &= 2\left[\sin(2x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(2x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2\left[\sin(2x) \times \frac{1}{2} + \cos(2x) \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ &= \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) \end{aligned}$$

Ce qui correspond bien à l'expression déterminée à la question précédente.
Question 23 : E
Soit $x \in [0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi \ \text{ (avec } k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{k\pi - \frac{\pi}{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3k-1}{6}\pi \end{aligned}$$

On détermine alors toutes les solutions pour lesquelles $x \in [0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned} k = 0 &\Rightarrow x = \frac{3 \times 0 - 1}{6}\pi = \frac{-\pi}{6} < 0 \\ k = 1 &\Rightarrow x = \frac{3 \times 1 - 1}{6}\pi = \frac{\pi}{3} \in [0, 2\pi[\\ k = 2 &\Rightarrow x = \frac{3 \times 2 - 1}{6}\pi = \frac{5\pi}{6} \in [0, 2\pi[\\ k = 3 &\Rightarrow x = \frac{3 \times 3 - 1}{6}\pi = \frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi[\\ k = 4 &\Rightarrow x = \frac{3 \times 4 - 1}{6}\pi = \frac{11\pi}{6} \in [0, 2\pi[\\ k = 5 &\Rightarrow x = \frac{3 \times 5 - 1}{6}\pi = \frac{7\pi}{3} > 2\pi \end{aligned}$$

On remarque que $k \leqslant 0 \Rightarrow x < 0$ et $k \geqslant 5 \Rightarrow x > 2\pi$.
L'ensemble des solutions $x \in [0, 2\pi[$ tels que $f(x) = 0$ est ainsi :

$$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right\}$$

Question 24 : B
Ici, on teste les fonctions candidates, et on constate que seule $\{g : x \mapsto 2xe^{-x}\}$ est solution de (G).
En effet, soit $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) + g(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2xe^{-x} = 2e^{-x}$$

Question 25 : C

D'après l'énoncé, les solutions h de (G) sont la somme d'une solution de (G_0) et d'une solution particulière de (G). D'après le cours, les solutions de (G_0) sont de la forme :

$$\{g_0 : x \mapsto Ce^{-x},\ C \in \mathbb{R}\}$$

La question précédente nous a fourni une solution particulière de (G) :

$$\{g : x \mapsto 2xe^{-x}\}$$

Ainsi, les solutions de (G) sont de la forme :

$$\{h : x \mapsto Ce^{-x} + 2xe^{-x},\ C \in \mathbb{R}\}$$

L'énoncé indique par ailleurs :

$$h(0) = -1 \Leftrightarrow Ce^0 + 2 \times 0 \times e^0 = -1 \Leftrightarrow C = -1$$

Conclusion, la solution h de l'équation (G) qui vérifie la condition initiale $h(0) = -1$ est :

$$\{h : x \mapsto (2x - 1)e^{-x}\}$$