Épreuve 2019
Mathématiques
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Solutions proposés par : Francis Brunel*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de Mathématiques du concours GSEA/TSEEAC 2019. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat de mon travail uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Auteur de l'ouvrage : Annales corrigées du concours GSEA/TSEEAC.

Corrigé 2019

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D	E	A	A	E	D	C	D	C	A	B	C	D

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	BD	A	E	B	AD	E	C	D	C	A	BC

Question 1 : D
Soit X la variable aléatoire représentant l'heure d'arrivée de Max (en heures). On cherche :

$$p_1 = \mathrm{P}(X \leqslant 15,25)$$

D'après l'énoncé :

$$X = 13 + t + t + 0,5 \text{ (où } t \in [0;1])$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \leqslant 15,25) &= \mathrm{P}(13 + t + t + 0,5 \leqslant 15,25) \\ &= \mathrm{P}(2t + 13,5 \leqslant 15,25) \\ &= \mathrm{P}(2t \leqslant 1,75) \\ &= \mathrm{P}(t \leqslant 0,875) \end{aligned}$$

Or, t est un nombre quelconque pris au hasard dans $[0;1]$, c'est à dire que t suit une loi uniforme continue sur $[0;1]$. D'où :

$$p_1 = \mathrm{P}(t \leqslant 0,875) = \frac{0,875}{1-0} = 0,875$$

Question 2 : E
On cherche maintenant :

$$p_2 = \mathrm{P}(X = 15) = \mathrm{P}(2t + 13,5 = 15) = \mathrm{P}(t = 0,75)$$

Or, on l'a vu à la question précédente, t suit une loi uniforme continue sur $[0;1]$, et ainsi $\forall\ \alpha \in [0;1]$, $\mathrm{P}(t = \alpha) = 0$.
D'où :

$$p_2 = 0$$

La probabilité que Max arrive avec exactement 15 min d'avance est nulle.
Question 3 : A
Un retard de 9 min correspond à une heure d'arrivée à 15h24 = 15,4h. Calculons :

$$\begin{aligned} p_3 &= \mathrm{P}(X \geqslant 15,4) \\ &= \mathrm{P}(2t + 13,5 \geqslant 15,4) \\ &= \mathrm{P}(t \geqslant 0,95) \\ &= 1 - \mathrm{P}(t \leqslant 0,95) \\ &= 1 - \frac{0,95}{1-0} \\ &= 0,05 \end{aligned}$$

Question 4 : A

$$\begin{aligned}
p_4 &= \mathrm{P}(14\text{h}54 \leqslant X \leqslant 15\text{h}06)\\
&= \mathrm{P}(14,9 \leqslant X \leqslant 15,1)\\
&= \mathrm{P}(14,9 \leqslant 2t + 13,5 \leqslant 15,1)\\
&= \mathrm{P}(0,7 \leqslant t \leqslant 0,8)\\
&= \frac{0,8 - 0,7}{1 - 0}\\
&= 0,1
\end{aligned}$$

Question 5 : E
Notons que 14h54 correspond à 14,9h, et 15h15 correspond à 15,25h. On cherche désormais t tel que :

$$\begin{gathered}
14,9 \leqslant 2t + 13,5 \leqslant 15,25\\
\Leftrightarrow 0,7 \leqslant t \leqslant 0,875\\
\Leftrightarrow 13,7 \leqslant 13 + t \leqslant 13,875\\
\Leftrightarrow 13\text{h}42\text{min} \leqslant \text{ heure de départ } \leqslant 13\text{h}52\text{min}30\text{sec}
\end{gathered}$$

Attention la proposition B est fausse, car si Max part à 13h52min25sec, il arrivera à son rendez-vous entre 14h54 et 15h15 d'après le calcul précédent.
Question 6 : D
En traduisant l'énoncé on a :

$$\mathrm{u}_0 = 10$$

Et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{u}_{n+1} = (1 - 0,2) \times \mathrm{u}_n = 0,8 \times \mathrm{u}_n$$

Ainsi, $(\mathrm{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 0,8.
Question 7 : C
D'après le résultat établi à la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{u}_n = \mathrm{u}_0 \times (0,8)^n = 10 \times (0,8)^n = 10 \times 0,8 \times (0,8)^{n-1} = 8 \times (0,8)^{n-1}$$

Question 8 : D
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{gathered}
\text{La quantité de médicament restant dans le sang}\\
\text{devient inférieure à 1\% de la quantité initiale}\\
\Leftrightarrow \mathrm{u}_n \leqslant \frac{\mathrm{u}_0}{100}\\
\Leftrightarrow 10 \times (0,8)^n \leqslant \frac{10}{100}\\
\Leftrightarrow \left(\frac{8}{10}\right)^n \leqslant \frac{1}{100}\\
\Leftrightarrow \left(\frac{10}{8}\right)^n \geqslant 100\\
\Leftrightarrow (1,25)^n \geqslant 100
\end{gathered}$$

Or, d'après l'énoncé : $(1,25)^{20} \simeq 86{,}74$. A partir de ce résultat, en posant le calcul à la main, on obtient $(1,25)^{21} > 100$. Conclusion, la quantité de médicament restant dans le sang devient inférieure à 1% de la quantité initiale au bout de 21 min.

Question 9 : C

Soit $n \in \mathbb{N}$. En traduisant l'énoncé :

$$\mathrm{w}_{n+1} = (1-0,2)\mathrm{w}_n + 1 = 0,8 \times \mathrm{w}_n + 1$$

Question 10 : A

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \mathrm{w}_{n+1} - 5 \\ &= 0,8 \times \mathrm{w}_n + 1 - 5 \\ &= 0,8 \times \mathrm{w}_n - 4 \\ &= 0,8 \times (\mathrm{w}_n - 5) \\ &= 0,8 \times z_n \end{aligned}$$

De plus :

$$z_0 = \mathrm{w}_0 - 5 = 10 - 5 = 5$$

Ainsi, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de raison 0,8 et de premier terme $z_0 = 5$.

Question 11 : B

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & z_n = 5 \times (0,8)^n \\ \Rightarrow\ & \mathrm{w}_n - 5 = 5 \times (0,8)^n \\ \Rightarrow\ & \mathrm{w}_n = 5 \times (1-0,2)^n + 5 \end{aligned}$$

Question 12 : C

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{w}_n = 5 \times (1-0,2)^n + 5 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 5$$

$$\left(\text{car } (1-0,2) < 1 \Rightarrow (1-0,2)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

Question 13 : D

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \underbrace{(2+\cos(x))}_{\geqslant 2\text{-}1>0}\underbrace{e^{1-x}}_{>0}$$

Ainsi, pour tout réel x , $f(x) > 0$.

Question 14 : C

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-\sin(x))\, e^{1-x} - (2+\cos(x))\, e^{1-x} \\ &= -\,(2+\cos(x)+\sin(x))\, e^{1-x} \end{aligned}$$

Question 15 : B et D

Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant les formules trigonométriques :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}\left[\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\\
&= \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right]\\
&= (\cos(x)+\sin(x))
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}\left[\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\\
&= \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right]\\
&= (\cos(x)-\sin(x))
\end{aligned}$$

Question 16 : A
A partir de la relation établie à la question précédente, on a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\left(2+\cos(x)+\sin(x)\right)e^{1-x}\\
&= -\underbrace{\left[2+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]}_{\geqslant 2\text{-}\sqrt{2}>0}\underbrace{e^{1-x}}_{>0}
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) < 0$$

Question 17 : E
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = (2+\cos(x))\,e^{1-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\left(\text{car } e^{1-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } (2+\cos(x)) \in [1;3]\ \forall x \in \mathbb{R}\right)$$

Et :

$$f(x) = (2+\cos(x))\,e^{1-x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$\left(\text{car } e^{1-x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } (2+\cos(x)) \geqslant 1\ \forall x \in \mathbb{R}\right)$$

Question 18 : B
Calculons :

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 f(t)\,dt\\
&= \int_0^1 (2+\cos(t))\,e^{1-t}\,dt\\
&= \int_0^1 2e^{1-t}\,dt + \int_0^1 \cos(t)e^{1-t}\,dt\\
&= 2\left[-e^{1-X}\right]_0^1 + \int_0^1 \cos(t)e^{1-t}\,dt
\end{aligned}$$

$$= 2\left(-e^0 + e^1\right) + \int_0^1 \cos(t)e^{1-t}\,dt$$
$$= 2e - 2 + \int_0^1 \cos(t)e^{1-t}\,dt$$

Question 19 : A et D
Soit $t \in \mathbb{R}$:

$$f_1'(t) = -\sin(t)e^{1-t} - \cos(t)e^{1-t}$$
$$= -\left(\sin(t) + \cos(t)\right)e^{1-t}$$

Et :

$$f_2'(t) = \cos(t)e^{1-t} - \sin(t)e^{1-t}$$
$$= \left(\cos(t) - \sin(t)\right)e^{1-t}$$

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$f_1(t) = \cos(t)e^{1-t} = \frac{1}{2}\Big[f_2'(t) - f_1'(t)\Big]$$

Et :

$$f_2(t) = \sin(t)e^{1-t} = -\frac{1}{2}\Big[f_1'(t) + f_2'(t)\Big]$$

Question 20 : E
A partir des résultats précédents :

$$A = 2e - 2 + \int_0^1 \cos(t)e^{1-t}\,dt$$
$$= 2e - 2 + \int_0^1 f_1(t)\,dt$$
$$= 2e - 2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[f_2'(t) - f_1'(t)\Big]\,dt$$
$$= 2e - 2 + \frac{1}{2}\Big[f_2(X) - f_1(X)\Big]_0^1$$
$$= 2e - 2 + \frac{1}{2}\Big[\sin(1)e^{1-1} - \cos(1)e^{1-1} - \Big(\sin(0)e^{1-0} - \cos(0)e^{1-0}\Big)\Big]$$
$$= 2e - 2 + \frac{1}{2}\Big[\sin(1) - \cos(1) + e\Big]$$
$$= \frac{5}{2}e - 2 + \frac{\sin(1) - \cos(1)}{2}$$

Question 21 : C
On a :

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Question 22 : D
Calculons à partir des résultats de la question précédente :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{2\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

Question 23 : C

A partir des formes algébriques des complexes proposés :

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1-i}{\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}} \\
&= (1-i) \times \frac{\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}}{\left(\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}\right)} \\
&= (1-i) \times \frac{\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}}{\left|\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\right|^2} \\
&= (1-i) \times \left[\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}\right] \times \frac{1}{2} \\
&= \left[\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right] \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

Question 24 : A

En identifiant partie réelle et imaginaire on obtient :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Et :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Question 25 : B et C

La fonction $\{\cos : x \mapsto \cos(x)\}$ est paire. Ainsi :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

La fonction $\{\sin : x \mapsto \sin(x)\}$ est impaire. Ainsi :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$