Corrigé

Épreuve 2013
Mathématiques & Physique
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Solutions proposés par : Francis Brunel*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2013. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat de mon travail uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Auteur de l'ouvrage : Annales corrigées du concours GSEA/TSEEAC.

Corrigé 2013

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	AC	D	E	BC	E	AC	BD	AD	D	C	BD	CD	AC	BD

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
BC	C	C	B	B	C	BD	C	BD	AD	AC	D	AC	B	D

Question 1 : D
L'équation paramétrique de la droite (D) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& (x_b - x_a)t + x_a \\ y &=& (y_b - y_a)t + y_a \quad t \in \mathbb{R} \\ z &=& (z_b - z_a)t + z_a \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x &=& (3-1)t + 1 \\ y &=& (-5-(-2))t - 2 \quad t \in \mathbb{R} \\ z &=& (-2-(-1))t - 1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t + 1 \\ y &=& -3t - 2 \quad t \in \mathbb{R} \\ z &=& -t - 1 \end{array}\right.$$

D'après l'équation paramétrique précédente, la droite (D) est dirigée par le vecteur $(2, -3, -1)$.
D'après l'équation paramétrique fournie dans l'énoncé, la droite (D') est dirigée par le vecteur $(-1, 2, 1)$.
Ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ainsi les deux droites ne sont pas parallèles.
Cherchons si elles admettent un point commun. Soit M de coordonnées (x, y, z) tel que $M \in (D)$ et $M \in (D')$. Ainsi, il existe $t, k \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 + 2t &=& 2 - k \\ -2 - 3t &=& 1 + 2k \\ -1 - t &=& k \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1 + 2t &=& 2 - (-1 - t) \\ -2 - 3t &=& 1 + 2(-1 - t) \\ -1 - t &=& k \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t &=& 2 \\ t &=& -1 \\ -1 - t &=& k \end{array}\right.$$

Ce qui est impossible. Ainsi, (D) et (D') n'ont aucun point commun.
Conclusion, comme (D) et (D') ne sont pas parallèles et n'ont aucun point commun, alors elles ne sont pas coplanaires.

Question 2 : A et C
Soit M de coordonnées (x, y, z) tel que $M \in (D)$. Ainsi, $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t + 1 \\ y &=& -3t - 2 \\ z &=& -t - 1 \end{array}\right.$$

Calculons :

$$\begin{aligned} &4x + y + 5z + 3 \\ &= 4(2t + 1) + (-3t - 2) + 5(-t - 1) + 3 \\ &= 8t + 4 - 3t - 2 - 5t - 5 + 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $M \in (P)$. Conclusion, le plan (P) contient la droite (D). De plus, comme cela a été vu à la question précédente, (D) et (D') ne sont pas coplanaires. Alors, le plan (P) ne contient pas la droite (D').
Cherchons le point d'intersection de (D') avec (P). Soit M de coordonnées (x, y, z) tel que $M \in (D')$. Ainsi, $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-k \\ y & = & 1+2k \\ z & = & k \end{array}\right.$$

Et :

$$M \in (P)$$
$$\Leftrightarrow 4x+y+5z+3=0$$
$$\Leftrightarrow 4(2-k)+1+2k+5k+3=0$$
$$\Leftrightarrow -4k+8+1+2k+5k+3=0$$
$$\Leftrightarrow 3k=-12$$
$$\Leftrightarrow k=-4$$

Conclusion, le point d'intersection de (D') avec (P) est de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-(-4) \\ y & = & 1+2(-4) \\ z & = & -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 6 \\ y & = & -7 \\ z & = & -4 \end{array}\right.$$

Question 3 : D
On calcule :

$$|z_a| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\arg(z_a) = -\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{7\pi}{4} \ [2\pi]$$

Question 4 : E
On a :

$$\frac{z_b}{z_a} = \frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i}$$
$$= \frac{\left(2+\sqrt{3}+i\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{2+\sqrt{3}+i+\left(2+\sqrt{3}\right)i-1}{|1-i|^2}$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}+\left(3+\sqrt{3}\right)i}{2}$$

Question 5 : B et C

$$\left|\frac{z_b}{z_a}\right| = \left|\frac{1+\sqrt{3}+\left(3+\sqrt{3}\right)i}{2}\right|$$
$$= \left|\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2}\right|$$

$$= \left(1+\sqrt{3}\right)\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$$
$$= \left(1+\sqrt{3}\right)$$

Ainsi :

$$|z_b| = \left(1+\sqrt{3}\right)|z_a|$$
$$= \left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}+\sqrt{6}$$

De plus :

$$\arg\left(\frac{z_b}{z_a}\right) = \arg\left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

D'où :

$$\arg(z_b) = \frac{\pi}{3} + \arg(z_a)$$
$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$$

Question 6 : E
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f_0(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

D'où :

$$f_0'(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f_0'(x)$	$+$
$f_0(x)$	$\nearrow$

Question 7 : A et C
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f_0(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\left(\text{car } e^{-x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty\right)$$

Et :

$$f_0(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\left(\text{car } e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

La courbe C_0 admet donc deux asymptotes horizontales d'équation $y = 0$ et $y = 1$.

Question 8 : B et D

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f_1(-x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^{-x}e^x}{e^{-x}(1+e^x)} = \frac{1}{e^{-x}+1} = f_0(x)$$

On pose :

$$f_1(-x) = f_1(g(x)) \text{ avec } \{g : x \mapsto -x\}$$

En dérivant l'égalité $f_0(x) = f_1(-x)$ on obtient alors :

$$f_0'(x) = (f_1 \circ g)'(x) = g' \times f_1'(g(x)) = -f_1'(-x)$$

Attention ici à bien dériver une fonction composée.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f_1'(x) = -f_0'(-x)$$

Or, f_0' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ comme cela a été démontré à la question 6. Conclusion, f_1' est strictement négative sur $\mathbb{R}$ et ainsi f_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Question 9 : A et D

On a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f_1(-x) = f_0(x)$$

Ainsi, C_0 et C_1 sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
De plus, la précédente égalité appliqué en 0, donne :

$$f_1(-0) = f_0(0)$$
$$\Leftrightarrow f_1(0) = f_0(0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$$

Conclusion, les courbes C_0 et C_1 ont un point commun de cordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Question 10 : D

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $x \in \mathbb{R}^-$:

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \geqslant \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{e^{2x}+e^{x}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
$$\left(\text{car } e^{\Delta} \underset{\Delta\to-\infty}{\longrightarrow} 0^+\right)$$

Ainsi :

$$f_n(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\left(\text{car } e^{\Delta} \underset{\Delta\to-\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

Conclusion, f_n a pour limite $+\infty$ en $-\infty$, et 0 en $+\infty$.

Question 11 : C

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= \frac{-ne^{-nx}\left(1+e^{-x}\right) - e^{-nx} \times \left(-e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{-e^{-nx}\left(n + ne^{-x} - e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{-e^{-nx}\left(n + (n-1)e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{e^{nx}}{e^{nx}} \times \frac{-\left(n + (n-1)e^{-x}\right)}{e^{nx}\left(1+e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{-\Big(ne^{nx} + (n-1)e^{(n-1)x}\Big)}{\left(e^{nx} + e^{(n-1)x}\right)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi f_n' est négative sur $\mathbb{R}$ (dénominateur toujours positif et numérateur toujours négatif). La fonction est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, f_n est positive sur $\mathbb{R}$, en tant que quotient de fonctions positives sur $\mathbb{R}$.

Conclusion, f_n est décroissante et minorée par 0 sur $\mathbb{R}$.

Question 12 : B et D

On calcule :

$$\begin{aligned}
u_1 &= \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[-\ln\Big(1+e^{-X}\Big)\Big]_0^1 \\
&= -\Big[\ln\Big(1+e^{-1}\Big) - \ln(1+1)\Big] \\
&= \ln(2) - \ln\Big(1+e^{-1}\Big)
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
u_0 &= \int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(1 - f_1(x)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - u_1 \\
&= 1 - \ln(2) + \ln\Big(1+e^{-1}\Big)
\end{aligned}$$

De plus, soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$0 \leqslant u_n \text{ (car la fonction intégrée est positive sur tout l'intervalle d'intégration)}$$

Et :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-1}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1}\,\mathrm{d}x$$

Conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

Question 13 : C et D
Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0;1]$:

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{e^{-(n+1)x}}{e^{-nx}} = \frac{1}{e^x} \leqslant 1 \text{ (car } x \in [0;1] \text{)}$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$$

En intégrant cette inégalité de fonctions naturellement définies et continues sur [0 ;1], on obtient :

$$\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_n$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
De plus, en repartant de l'encadrement de u_n de la question précédente, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant \left[-\frac{1}{n}e^{-nX}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{n}$$

Mais :

$$\frac{1-e^{-n}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\left(\text{car } e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Question 14 : A et C
Par définition de la loi exponentielle de paramètre λ :

$$\mathrm{p}(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-\lambda t}$$

« La probabilité qu'un téléphone portable ait une durée de vie strictement supérieure à deux années est égale à e^{-2} » signifie :

$$\mathrm{p}(X > 2) = e^{-2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \mathrm{p}(X \leqslant 2) = e^{-2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-2\lambda} = e^{-2}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln\left(e^2\right)}{2} = 1$$

Question 15 : B et D
Par définition de l'espérance de X, pour une loi exponentielle de paramètre λ :

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} = 1$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}(X > 4) &= \mathrm{p}(X > 1)\mathrm{p}_{X>1}(X > 4)\\
\Rightarrow \mathrm{p}_{X>1}(X > 4) &= \frac{\mathrm{p}(X > 4)}{\mathrm{p}(X > 1)}\\
&= \frac{1 - \mathrm{p}(X \leqslant 4)}{1 - \mathrm{p}(X \leqslant 1)}\\
&= \frac{e^{-4}}{e^{-1}}\\
&= e^{-3}
\end{aligned}$$

Question 16 : B et C
L'oscilloscope est un instrument de mesure de tension et non d'intensité. La lumière extérieure n'a aucun impact sur l'expérience puisque l'on capte des ondes mécaniques. Par ailleurs, les masses sont reliées entre elles dans l'oscilloscope. Comme les deux voies sur le schéma sont connectées à leur masse, elles sont reliées entre elles.
Question 17 : C
On observe sur le schéma, quatre divisions pour une période. L'énoncé indique 5 μs/div. Ainsi :

$$T = 4 \times 5 = 20\ \mu\mathrm{s} = 20 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}$$

D'où :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^4\ \mathrm{Hz} = 50\ \mathrm{kHz}$$

Question 18 : C
La longueur d'onde définit la distance entre deux perturbations. Les signaux sont en phase sur l'oscilloscope avant le déplacement du capteur. Ainsi, le déplacement du capteur jusqu'à retrouver les deux signaux en phase, va mesurer exactement la longueur d'onde.

$$\lambda = d' - d = 3,5 - 2,8 = 0,7\ \mathrm{cm}$$

Question 19 : B
Par définition :

$$\lambda = \frac{\mathrm{v}}{f} \Rightarrow \mathrm{v} = f\lambda$$

Question 20 : B
D'après la question précédente :

$$\mathrm{v} = f\lambda = 5 \times 10^4 \times 0,7 \times 10^{-2} = 3,5 \times 10^2 = 350\ \mathrm{m/s}$$

Question 21 : C

La distance d'éloignement pour se retrouver en phase est quatre fois plus élevée que dans l'air. Ce qui signifie que $\lambda_{eau} = 4\lambda_{air}$. D'où :

$$\mathrm{v}_{eau} = f\lambda_{eau} = f \times 4\lambda_{air} = 4f\lambda_{air} = 4\mathrm{v}_{air} = 1400 \text{ m/s}$$

Question 22 : B et D

L'onde ultrasonore est une onde mécanique. De plus, la direction de la perturbation est parallèle à la direction de propagation. C'est donc une onde longitudinale.

Question 23 : C

L'énoncé indique que « $\frac{1}{V}$ varie linéairement avec la hauteur h », ce qui signifie qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{V} = \alpha h + \beta$$

Ainsi, V ne peut être nul, sinon h serait infini. D'après cette formule, on pourrait très bien avoir h nulle sans que V soit infini. De plus, théoriquement, h pourrait être négative sans que V soit négative car on ne connait pas les valeurs de α et β. Enfin, h et $\frac{1}{V}$ ne sont proportionnels que dans le cas particulier où $\beta = 0$.

Question 24 : B et D

En appliquant la loi des gazs parfaits, en supposant que la température est constante, on a PV = constante. Ainsi, quand V augmente, P diminue.
De plus, h augmente $\Rightarrow$ (d'après l'énoncé) V augmente $\Rightarrow$ (d'après la relation ci dessus) P diminue.

Question 25 : A et D

La température à laquelle l'eau liquide se transforme en gaz varie en fonction de la pression. A titre d'exemple, dans les centrales nucléaires exploitées en France, l'eau circulant à 300°C dans le circuit primaire, reste liquide car maintenu à 150 bars de pression. A l'inverse, une pression faible diminuera la température de changement d'état liquide $\rightarrow$ gazeux. On constate ce phénomène à la montagne (basse pression), où l'eau bout à une température inférieure à 100°C. Ainsi, pour l'expérience proposée ici, comme lorsque h augmente P diminue d'après la question précédente, le gaz qui apparait peut être considéré comme de la vapeur d'eau, et une faible pression provoque au sein du liquide l'apparition de gaz sous forme de bulles.

Question 26 : A et C

Repartons de la définition de la force gravitationnelle d'une planète P (masse M) sur un satellite S (masse m) dont les centres sont distant de r :

$$\overrightarrow{F}_{P/S} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{u}_{P\rightarrow S}$$

Ainsi, en norme on a :

$$F_{P/S} = \frac{GMm}{r^2}$$

On se place à la surface terrestre, on a alors :

$$F_{Terre/S} = \frac{GM_Tm}{R_T^2} = mG_0$$

$$\Rightarrow G_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} \qquad (1)$$

Et, à une altitude h au dessus du sol :

$$F_{Terre/S} = \frac{GM_Tm}{(R_T+h)^2} = mG_h$$

$$\Rightarrow G_h = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2} \qquad (2)$$

Ainsi, (1) × (2) :

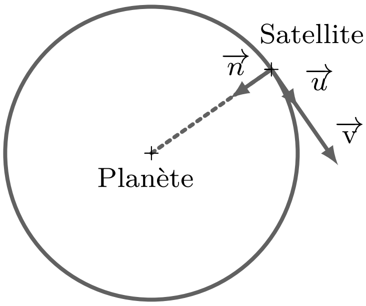
$$\frac{GM_T}{(R_T+h)^2} \times G_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} \times G_h$$

$$\Rightarrow G_h = \frac{G_0 R_T^2}{(R_T+h)^2}$$

Question 27 : D

L'expression de l'accélération du satellite dans le repère de Frenet est :

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\overrightarrow{u} + \frac{\mathrm{v}^2}{r}\overrightarrow{n}$$



En appliquant la seconde loi de Newton au satellite S, soumis uniquement à la force gravitationnelle d'après l'énoncé, on obtient :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}_{Terre/S}$$

$$\Leftrightarrow m\left(\frac{d\mathrm{v}}{dt}\overrightarrow{u} + \frac{\mathrm{v}^2}{R_T+h}\overrightarrow{n}\right) = -\frac{GM_T m}{(R_T+h)^2}\overrightarrow{u}_{Terre\to S}$$

$$\Leftrightarrow m\left(\frac{d\mathrm{v}}{dt}\overrightarrow{u} + \frac{\mathrm{v}^2}{R_T+h}\overrightarrow{n}\right) = \frac{GM_T m}{(R_T+h)^2}\overrightarrow{n}$$

En projection sur $\overrightarrow{n}$:

$$\frac{\mathrm{v}^2}{R_T+h} = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} \qquad (3)$$

Ainsi, en utilisant le résultat (1) de la question précédente :

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{G_0 R_T^2}{R_T+h}}$$

Question 28 : A et C

On a :

$$\mathrm{v} = \frac{d}{t}$$

La vitesse étant constante sur le tour complet, on obtient :

$$\mathrm{v} = \frac{2\pi(R_T + h)}{T}$$
$$\Rightarrow T = \frac{2\pi(R_T + h)}{\mathrm{v}}$$

De plus :

$$T = \frac{2\pi}{w}$$
$$\Rightarrow w = \frac{2\pi}{T}$$
$$= \frac{\mathrm{v}}{R_T + h}$$

En utilisant le résultat (3) de la question précédente :

$$w = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T + h)^3}}$$

Question 29 : B

La terre effectue un tour complet autour de son axe en 24h, soit :

$$T_0 = 24 \times 3\,600 = 86\,400 \text{ s}$$

Question 30 : D

Considérons la vitesse de rotation du satellite, par rapport à un point fixe du sol :

$$w_{S/pointfixe} = w - w_{Terre}$$
$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{T_0}$$
$$\Rightarrow T' = \frac{1}{\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}} = \frac{T_0 T}{T_0 - T}$$