Corrigé

Épreuve 2014

Mathématiques & Physique

(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Solutions proposés par : Francis Brunel*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2014. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat de mon travail uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Auteur de l'ouvrage : Annales corrigées du concours GSEA/TSEEAC.

Corrigé 2014

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	AD	C	AD	B	E	E	AB	CD	CD	A	D	A	E	C

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	A	C	AB	C	B	BD	AC	A	D	B	BD	B	B	D

Question 1 : B
«Les trois jetons sont alignés horizontalement» signifie : «le premier jeton est placé n'importe où», puis «le second jeton est placé sur une des deux positions restantes sur la même ligne que le premier jeton», puis «le troisième jeton est placé sur la dernière position sur la même ligne que les deux précédents». Ainsi :

$$p(H) = \frac{9}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$$

Les événements H et V étant équivalents, on a :

$$p(V) = p(H) = \frac{1}{28}$$

Question 2 : A et D
Pour l'évènement D, deux scénarios sont possibles :

- «le premier jeton est placé dans un des quatre coins», puis «le deuxième jeton est placé sur la diagonale du premier jeton, dans une des deux positions restantes», puis «le troisième jeton est placé dans la dernière position disponible dans la diagonale».
- «le premier jeton est placé au centre», puis «le deuxième jeton est placé dans un des quatre coins», puis «le troisième jeton est placé dans la dernière position disponible dans la diagonale».

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} p(D) &= \frac{4}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{1}{7} \\ &= \frac{8}{9 \times 8 \times 7} + \frac{4}{9 \times 8 \times 7} \\ &= \frac{12}{9 \times 8 \times 7} \\ &= \frac{1}{42} \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} p(N) &= 1 - (p(H) + p(V) + p(D)) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{42}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{6}{7 \times 4 \times 3} + \frac{2}{7 \times 6 \times 2}\right) \\ &= 1 - \frac{2}{21} \\ &= \frac{19}{21} \end{aligned}$$

Question 3 : C
Par définition, pour une variable aléatoire discrète X :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Appliqué à notre cas :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 20p(H) + 20p(V) + \alpha p(D) - 2p(N) \\
&= \frac{20}{28} + \frac{20}{28} + \frac{\alpha}{42} - \frac{38}{21} \\
&= \frac{60}{7 \times 4 \times 3} + \frac{60}{7 \times 4 \times 3} + \frac{2\alpha}{7 \times 6 \times 2} - \frac{152}{7 \times 3 \times 4} \\
&= \frac{30 + 30 + \alpha - 76}{7 \times 3 \times 2} \\
&= \frac{\alpha - 16}{42}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(X) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\alpha - 16 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\alpha = 16
\end{aligned}$$

Question 4 : A et D
Comme on l'a vu à la première question, le premier jeton peut être placé n'importe sans que cela ne modifie la probabilité d'apparition de l'évènement H (ou V). Ainsi, le dérèglement de la machine ne modifie pas le résultat :

$$p_{\Delta}(H) = \frac{1}{28} = \frac{3}{84}$$

Question 5 : B
Le dérèglement de la machine va modifier la probabilité d'apparition de l'évènement D. En effet, il reste uniquement le scénario : «le deuxième jeton est placé sur la diagonale du premier jeton, dans une des deux positions restantes», puis «le troisième jeton est placé dans la dernière position disponible dans la diagonale». Ce qui donne :

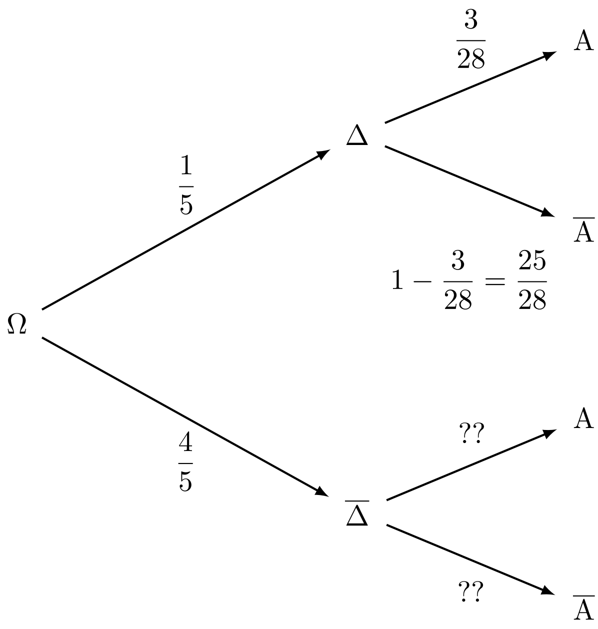
$$p_{\Delta}(D) = \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
p_{\Delta}(A) &= p_{\Delta}(H) + p_{\Delta}(V) + p_{\Delta}(D) \\
&= \frac{1}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28} \\
&= \frac{3}{28}
\end{aligned}$$

Question 6 : E

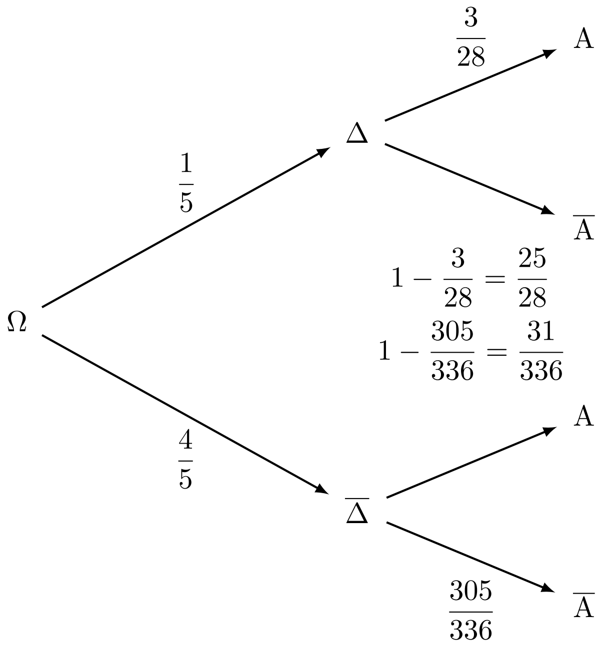
D'après les questions précédentes, ainsi que l'indication $p(\Delta) = \frac{1}{5}$, on construit l'arbre suivant :



Mais,

$$\begin{aligned}
p_{\overline{\Delta}}(\overline{A}) &= \frac{p\left(\overline{A} \cap \overline{\Delta}\right)}{p(\overline{\Delta})} \\
&= \frac{p(\overline{A}) - p\left(\overline{A} \cap \Delta\right)}{1 - p(\Delta)} \\
&= \frac{p(N) - p\left(\overline{A} \cap \Delta\right)}{1 - p(\Delta)} \\
&= \frac{\frac{19}{21} - \frac{25}{28} \times \frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} \\
&= \left[\frac{19}{21} - \frac{5}{28}\right] \times \frac{5}{4} \\
&= \left[\frac{76}{84} - \frac{15}{84}\right] \times \frac{5}{4} \\
&= \frac{61}{84} \times \frac{5}{4} \\
&= \frac{305}{336}
\end{aligned}$$

Ce qui donne l'arbre complet suivant :



Question 7 : E
L'énoncé est peu clair, mais je prends le parti de croire que l'on nous demande d'évaluer $p_A(\Delta)$. On a :

$$
\begin{aligned}
p_A(\Delta) &= \frac{p\left(A \cap \Delta\right)}{p(A)} \\
&= \frac{\dfrac{1}{5} \times \dfrac{3}{28}}{\dfrac{2}{21}} \\
&= \frac{\dfrac{3}{5 \times 7 \times 4}}{\dfrac{2}{7 \times 3}} \\
&= \frac{3}{20} \times \frac{3}{2} \\
&= \frac{9}{40}
\end{aligned}
$$

Question 8 : A et B
La fonction f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, en tant que produit de fonctions définies, continues, dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, la fonction f est bien définie pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour $x \in \mathbb{R}^{-*}$.
Question 9 : C et D
Soit $x \in \mathbb{R}^*$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left[-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right] \\
&= -\left(2 + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}
$$

$$= -\left(\frac{2x+1}{x^3}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

Question 10 : C et D

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$-(2x+1)$		$+$	0	$-$		$-$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	$\|$	$\searrow$	

Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty;-1[$, mais également sur $]0;+\infty[$.

Question 11 : A

On évalue :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = (1-2)e^{-2} + 1 = 1 - e^{-2} \ > 0$$

De plus, soit $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} (1+0)e^0 + 1 = 2$$

On peut alors compléter le tableau de variation précédent, ce qui donne :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$1-e^{-2} > 0$	$\nearrow$	$\|$	$\searrow$	2

Ainsi, f est positive pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Question 12 : D

$$\begin{aligned}
u_0 &= \int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\ln\left(1+e^X\right)\right]_0^1 \\
&= \ln\left(1+e^1\right) - \ln\left(1+e^0\right) \\
&= \ln(1+e) - \ln(2)
\end{aligned}$$

Question 13 : A

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 &= \int_0^1 \left(f_0(x) + f_1(x)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{e^x\left(1+e^x\right)}\right)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{2x}+e^x}{e^x\left(1+e^x\right)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{e^x\left(1+e^x\right)}{e^x\left(1+e^x\right)}\,\mathrm{d}x$$
$$= 1$$

Question 14 : E

$$u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln(1+e) + \ln(2)$$

Question 15 : C
Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0;1]$:

$$k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$$
$$= \frac{e^x}{e^{(n+1)x}\left(1+e^x\right)} - \frac{e^x}{e^{nx}\left(1+e^x\right)}$$
$$= \frac{e^x\left(1-e^x\right)}{e^{(n+1)x}\left(1+e^x\right)}$$
$$\leqslant 0$$

$$(\text{car } (1-e^x) \leqslant 0 \text{ sur } [0\,;1])$$

En intégrant l'inégalité sur $[0;1]$, on a :

$$\int_0^1 \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 0\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow (u_{n+1} - u_n) \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_n$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Question 16 : D
Pour une onde électromagnétique se déplaçant dans le vide :

$$\lambda = \frac{c}{f}$$
$$\Rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$$
$$\Rightarrow f = \frac{3\times 10^8}{500\times 10^{-9}} = 6\times 10^{14}\text{ Hz}$$

Question 17 : A
De plus :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6\times 10^{14}} = 1,67\times 10^{-15}\text{ s}$$

Question 18 : C
Le spectre du visible parcours l'intervalle des longueurs d'ondes [400 nm ;800 nm]. D'après l'énoncé $\lambda = 500$ nm. Ainsi, il s'agit d'une onde lumineuse.
Les ultraviolets sont les ondes électromagnétiques dont la longueur d'onde est en deçà de 400 nm. Les infrarouge sont les ondes électromagnétiques dont la longueur d'onde est au delà de 800 nm. Les rayons X sont les ondes électromagnétiques dont la longueur d'onde est très en deçà de 400 nm (entre 0,001 et 10 nm).

Question 19 : A et B
On a :

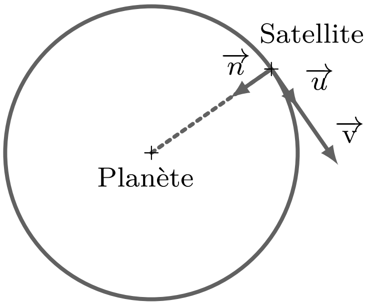
$$f = \frac{\text{v}}{\lambda} = \frac{1}{10 \times 10^{-2}} = 10 \text{ Hz} = 10 \text{ s}^{-1} = 600 \text{ min}^{-1}$$

Pour observer l'onde, il faut que la fréquence de l'onde observée soit un multiple de la fréquence de réglage du stroboscope. Ainsi, 300 éclairs par minutes et 600 éclairs par minutes conviennent.
Question 20 : C
On observe, sur l'oscilloscope, la période T égale à cinq divisions. Ainsi :

$$T = 5 \times 500 \times 10^{-6} = 2,5 \times 10^{-3} \text{ s}$$
$$\Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2,5 \times 10^{-3}} = 0,4 \times 10^{3} = 400 \text{ Hz}$$

Question 21 : B
Le spectre du sensible pour l'oreille humaine est compris entre 20 Hz et 20 kHz. Comme $f = 400$ Hz, le son sera audible, mais grave car situé autour des basses fréquences. La flûte à bec soprano étant réputée aiguë, le son ne pourra être joué par cet instrument.
Question 22 : B et D
L'accélération du satellite ayant une trajectoire circulaire, dans le repère de Frenet, s'écrit :

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\text{v}}{dt}\overrightarrow{u} + \frac{\text{v}^2}{r}\overrightarrow{n}$$



Ainsi, en considérant que la vitesse est constante, on obtient :

$$\overrightarrow{a} = \frac{\text{v}^2}{r}\overrightarrow{n}$$

Le sens de l'accélération est vers le centre du cercle de la trajectoire.
De plus, la force gravitationnelle exercée par la planète P de masse M_P sur le satellite S de masse m, s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_{P/S} = -\frac{GM_P m}{r^2}\overrightarrow{u}_{P \to S}$$

Ce qui donne, en norme :

$$F_{P/S} = \frac{GM_P m}{r^2}$$

L'intensité de la force qu'il subie de la planète attractive varie en $\frac{1}{r^2}$.
Question 23 : A et C
D'après la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_P}$$
$$\Rightarrow T = r^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_P}}$$

Ainsi, la période T du mouvement du satellite varie en $r^{\frac{3}{2}}$ et ne dépend pas de sa masse.

Question 24 : A

On converti des km/h en m/s :

$$\mathrm{v} = 54 \times \frac{1\,000}{3\,600} = \frac{54}{3,6} = 15 \text{ m/s}$$

Question 25 : D

On considère le véhicule de masse m en mouvement à 54 km/h au passage au point A (avec $t = t_a = 0$, $x_a = 0$ et $\mathrm{v}_a = 15$ m/s) et à l'arrêt au point B ($t = t_b$, $x_b = 50$ m et $\mathrm{v}_b = 0$). Le véhicule est considéré comme un solide indéformable, on a alors :

$$\Delta E_m = W_{freinage}$$
$$\Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = W_{freinage}$$

Or, la route est horizontale, donc $z_b = z_a \Rightarrow \Delta E_p = mg(z_b - z_a) = 0$. Ainsi :

$$\Delta E_c = W_{freinage}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\mathrm{v}_b^2 - \mathrm{v}_a^2\right) = W_{freinage}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 1\,000\left(0 - 15^2\right) = W_{freinage}$$
$$\Rightarrow W_{freinage} = -\frac{1}{2} \times 1\,000 \times 225 = -112\,500 \text{ J}$$

Question 26 : B

D'après l'énoncé, a est constante. On pose alors :

$$a = a_0$$

Pour retrouver les équations horaire, on intègre entre 0 et t. D'où :

$$\mathrm{v}(t) - \mathrm{v}(t = 0) = a_0(t - 0)$$
$$\Rightarrow \mathrm{v}(t) = a_0 t + \mathrm{v}_a \quad (1)$$

On intègre une seconde fois pour retrouver la position :

$$x(t) - x(t = 0) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + \mathrm{v}_a t$$
$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + \mathrm{v}_a t \quad (2)$$

En évaluant l'équation (1) en $t = t_b$, on obtient :

$$\mathrm{v}_b = a_0 t_b + \mathrm{v}_a$$
$$\Rightarrow t_b = -\frac{\mathrm{v}_a}{a_0} \quad (3)$$

En évaluant (2) en $t = t_b$, on obtient :

$$x_b = \frac{1}{2}a_0 t_b^2 + \mathrm{v}_a t_b$$

En introduisant le résultat (3) dans cette équation, il résulte :

$$x_b = \frac{1}{2}a_0\left(-\frac{\mathrm{v}_a}{a_0}\right)^2 + \mathrm{v}_a \times \left(-\frac{\mathrm{v}_a}{a_0}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{v}_a^2}{a_0} - \frac{\mathrm{v}_a^2}{a_0} = -\frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{v}_a^2}{a_0}$$

$$\Rightarrow a_0 = -\frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{v}_a^2}{x_b} = -\frac{1}{2} \times \frac{15^2}{50} = -\frac{225}{100} = -2,25 \text{ m.s}^{-2}$$

Question 27 : B et D
D'après l'énoncé, la puissance du radiateur est de 1 kW. Calculons l'énergie E qu'il fourni pendant un quart d'heure :

$$E = 1\,000 \times 15 \times 60 = 900\,000 \text{ J}$$

Pour convertir en Wh, il suffit de diviser ce résultat par 3 600. D'où :

$$E = \frac{900\,000}{3\,600} = 250 \text{ Wh}$$

Question 28 : B
Calculons la quantité d'énergie à fournir, par an, pour la pièce entière :

$$Q_{année} = 80\,000 \times 10 = 800\,000 \text{ Wh}$$

Ainsi, le chauffage fonctionnant 200 jours par an, pour une journée :

$$Q_{journée} = \frac{Q_{année}}{200} = \frac{800\,000}{200} = 4\,000 \text{ Wh}$$

D'après la question précédente, le chauffage fourni une énergie de 250 Wh pour un quart d'heure de fonctionnement. Ainsi, il fourni 1 000 Wh pour une heure.
Conclusion, il n'aura besoin de fonctionner que quatre heures par jour pour couvrir les besoins en chauffage.
Question 29 : B
Soit $m = \rho V$ la masse d'huile du radiateur. On a par définition :

$$Q = cm(\theta_{final} - \theta_{initial})$$

où «Q» est la quantité de chaleur reçue par le radiateur (en J), «c» est la capacité thermique massique de l'huile (en J.kg^{-1}.K^{-1}) et «θ_{final}» et «$\theta_{initial}$» les températures de l'huile à l'état final et initial (en K).
Ainsi :

$$Q = c\rho V(\theta_{final} - \theta_{initial}) = 2\,000 \times 0,8 \times 5 \times (20 - 40) = -160\,000 \text{ J}$$

Il s'agit de l'énergie reçue par le radiateur. L'énergie transmise par le radiateur vaut donc $-Q = 1,6 \times 10^5$ J.
Question 30 : D
L'énergie potentielle de pesanteur vaut :

$$E_p = mgz$$

où «m» est la masse de l'objet (en kg), «g» l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre (en m.s^{-2}) et «z» la hauteur de chute (en m). D'après l'énoncé, la hauteur de chute est ici de 100 m. On cherche alors m tel que :

$$1,6 \times 10^5 = m \times 10 \times 100$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{1,6 \times 10^5}{10 \times 100} = 1,6 \times 10^2 = 160 \text{ kg}$$