Épreuve 2016
Mathématiques & Physique
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Solutions proposés par : Francis Brunel*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2016. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat de mon travail uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Auteur de l'ouvrage : Annales corrigées du concours GSEA/TSEEAC.

Corrigé 2016

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	AB	D	C	AC	C	AD	E	B	BC	B	BC	D	B	D

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
BC	AC	BC	C	B	BD	D	D	B	D	B	C	D	C	D

Question 1 : D
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$u_{2n} = \frac{1}{2}$$
$$u_{2n+1} = 1$$

Et :

$$\mathrm{v}_n = u_n$$

Alors, on a bien $0 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{v}_n \leqslant 2u_n$ et $0 < u_n \leqslant 1$ mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, et $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Donc les propositions A et C sont fausses.
On pose maintenant :

$$u_n = 1$$
$$\mathrm{v}_n = \frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{2}$$

On a bien $0 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{v}_n \leqslant 2u_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, mais $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Ainsi, la proposition B est fausse.
Par ailleurs, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{v}_n \leqslant 2u_n$$

En particulier, on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leqslant \mathrm{v}_n$$

Ainsi :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \mathrm{v}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Question 2 : A et B
La tangente à la courbe représentative de f en -1 est une fonction affine du type :

$$\{y : x \mapsto mx + p, \text{ avec } (m,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

Avec :

$$f'(-1) = y'(-1)$$
$$\Rightarrow \left[3 \times (-1)^2 + 2 \times (-1)\right] e^{\left[(-1)^3+(-1)^2\right]} = m$$
$$\Rightarrow (3-2)e^0 = m$$
$$\Rightarrow m = 1$$

Et :

$$
\begin{aligned}
&f(-1) = y(-1)\\
&\Rightarrow e^{\left[(-1)^3+(-1)^2\right]} = -m+p\\
&\Rightarrow e^0 = -m+p\\
&\Rightarrow p = 1+m\\
&\Rightarrow p = 2
\end{aligned}
$$

D'où, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = x+2$$

Attention, la réponse A est juste une autre façon de présenter l'équation de la tangente.

Question 3 : D

Par définition de la valeur moyenne sur un segment donné :

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\left(x^3+x^2-x+1\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{2}\\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}2^4+\frac{1}{3}2^3-\frac{1}{2}2^2+2-\left(\frac{1}{4}(-1)^4+\frac{1}{3}(-1)^3-\frac{1}{2}(-1)^2-1\right)\right]\\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{16}{4}+\frac{8}{3}-\frac{4}{2}+2-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1\right)\right]\\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{48+32-24+24-(3-4-6-12)}{12}\right]\\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{80+19}{12}\right]\\
&= \frac{33}{12}\\
&= \frac{11}{4}
\end{aligned}
$$

Question 4 : C

On teste les réponses proposées et on constate. On introduit :

$$\left\{F : x \mapsto \left(-x-1+2e^x\right)e^{-x} = -\left(x+1\right)e^{-x}+2\right\}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= -(1)e^{-x}-(x+1)\times -e^{-x}\\
&= -e^{-x}+(x+1)e^{-x}\\
&= xe^{-x}
\end{aligned}
$$

Ainsi, F est une primitive de la fonction $\{f : x \mapsto xe^{-x}\}$.

Question 5 : A et C

Soit f et g deux fonctions continues sur $I=[a;b]$.

D'après le cours, si pour tout x de I, $f(x)=g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

De même, si pour tout x de I, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Question 6 : C

On considère telle que définie dans l'énoncé $\{f : x \mapsto ax^2 + bx + c\}$.
Comme $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, f s'annule en deux points distincts, que l'on nommera x_+ et x_-, avec $x_+ > x_-$.
La longueur de la base vaut :

$$L = x_+ - x_-$$

Cherchons la hauteur de l'arche. La fonction atteint son maximum au point d'abscisse x_m équidistant des points x_+ et x_-. C'est à dire :

$$x_m = \frac{x_+ + x_-}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = \frac{1}{2} \times -\frac{b}{a} = -\frac{b}{2a}$$

Ainsi, la hauteur de l'arche vaut :

$$\begin{aligned}
H &= f(x_m) \\
&= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\
&= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= -\frac{b^2}{4a} + c \\
&= -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&= -\frac{\Delta}{4a}
\end{aligned}$$

Calculons alors l'aire S de la surface sous l'arche parabolique, comprise entre la droite d'équation $y = 0$ et la courbe représentative de f :

$$\begin{aligned}
S &= \int_{x_-}^{x_+} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_-}^{x_+} \left(ax^2 + bx + c\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{a}{3}\left(x_+^3 - x_-^3\right) + \frac{b}{2}\left(x_+^2 - x_-^2\right) + c\,(x_+ - x_-)\right] \\
&= \left[\frac{a}{3}(x_+ - x_-)\left(x_+^2 + x_-^2 + x_+x_-\right) + \frac{b}{2}(x_+ - x_-)(x_+ + x_-) + c\,(x_+ - x_-)\right] \\
&= \frac{(x_+ - x_-)}{6}\left[2a\left(x_+^2 + x_-^2 + x_+x_-\right) + 3b\,(x_+ + x_-) + 6c\right]
\end{aligned}$$

Or, f s'annule en x_+ et x_-. On simplifie ainsi l'expression de S, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{(x_+ - x_-)}{6}\left[2a\,(x_+x_-) + b\,(x_+ + x_-) + 2c\right] \\
&= \frac{L}{6}\left[2a\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) + b\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) + 2c\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{L}{6}\left[2a\left(\frac{b^2-\Delta}{4a^2}\right)+b\left(-\frac{b}{a}\right)+2c\right] \\
&= \frac{L}{6}\left[\frac{b^2-\Delta}{2a}+-\frac{b^2}{a}+2c\right] \\
&= \frac{L}{6}\left[\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a}+-\frac{b^2}{a}+2c\right] \\
&= \frac{L}{6}\left(2c-\frac{b^2}{a}+2c\right) \\
&= \frac{L}{6}\left(-\frac{b^2-4ac}{a}\right) \\
&= \frac{L}{6}\left(-\frac{\Delta}{a}\right) \\
&= \frac{4L}{6}\left(-\frac{\Delta}{4a}\right) \\
&= \frac{2}{3}\times L\times H
\end{aligned}
$$

Question 7 : A et D

$$z=-\sqrt{3}+i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

La division euclidienne de 2013 par 6 donne :

$$2013=335\times 6+3$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
z^{2013} &= \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{2013} \\
&= 2^{2013}e^{i\frac{2013\times 5\pi}{6}} \\
&= 2^{2013}e^{i\frac{5\pi(335\times 6+3)}{6}} \\
&= 2^{2013}e^{i\left(5\pi\times 335+\frac{5\pi\times 3}{6}\right)} \\
&= 2^{2013}\times(-1)\times e^{i\frac{5\pi}{2}} \\
&= -2^{2013}e^{i\frac{\pi}{2}} \\
&= -2^{2013}i
\end{aligned}
$$

Conclusion, z^{2013} est un imaginaire pur.
De la même façon :

$$2016=336\times 6+0$$

D'où :

$$z^{2016}=\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{2016}$$

$$= 2^{2016} e^{i\frac{2016\times 5\pi}{6}}$$
$$= 2^{2016} e^{i\frac{5\pi(336\times 6)}{6}}$$
$$= 2^{2016} e^{i5\pi\times 336}$$
$$= 2^{2016}$$

Ainsi, z^{2016} est un réel.

Question 8 : E

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$ tel que :

$$\frac{z-8}{z-3} = z$$
$$\Leftrightarrow z - 8 = z^2 - 3z$$
$$\Leftrightarrow z^2 - 4z + 8 = 0$$

On résout cette équation du second degrés $(az^2 + bz + c = 0)$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 8 \times 1 = -16 < 0$$

Ainsi, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_- = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4-4i}{2} = 2 - 2i$$
$$z_+ = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4+4i}{2} = 2 + 2i$$

Conclusion, les solutions de l'équation proposée sont :

$$S = \{2 - 2i; 2 + 2i\}$$

Question 9 : B

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$|z - 1| = |\overline{z} + i| = |\overline{z - i}| = |z - i|$$

Ce qui signifie que la distance entre M d'affixe z et A d'affixe 1 doit être égale à la distance entre M d'affixe z et B d'affixe i. En d'autres termes, M est situé sur la médiatrice du segment $[AB]$.

Question 10 : B et C

L'équation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & (x_b - x_a)t + x_a \\ y & = & (y_b - y_a)t + y_a \\ z & = & (z_b - z_a)t + z_a \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & (-1-2)t + 2 \\ y & = & (2-0)t + 0 \\ z & = & (0-3)t + 3 \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -3t + 2 \\ y & = & 2t \\ z & = & -3t + 3 \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

Cherchons maintenant les points communs aux deux droites. Soit $M = (x, y, z)$ tel que $M \in (AB) \cap (D)$. C'est à dire qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{array}{rcll} -3t + 2 & = & 4 + 2u & (1) \\ 2t & = & 1 - u & (2) \\ -3t + 3 & = & -2 + u & (3) \end{array}$$

$$(2) + (3) \Rightarrow -t + 3 = -1 \Rightarrow t = 4$$

Et ainsi :

$$(2) \Rightarrow u = 1 - 2t = 1 - 8 = -7$$

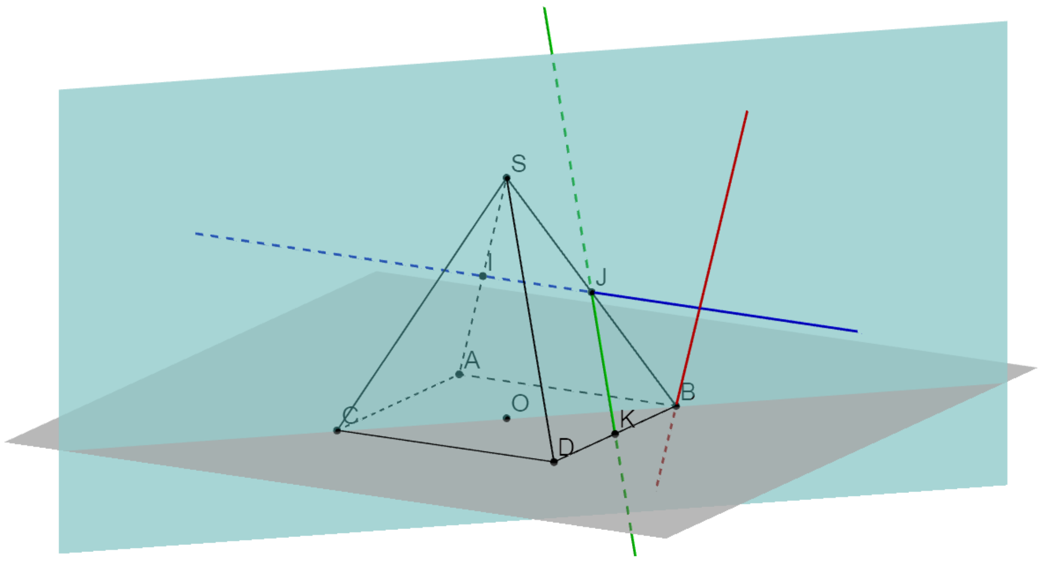
On vérifie que ces valeurs correspondent à l'égalité (1) :

$$-3 \times 4 + 2 = 4 + 2 \times (-7) = -10$$

Oui, c'est bien le cas. Conclusion, les deux droites sont sécantes au point $M = (-10; 8; -9)$. Elles sont donc coplanaires.

Question 11 : B

Ici, on dessine les éléments définis dans l'énoncé pour avoir une idée de ce dont on nous parle. Voici ce que donne le graphique complet :



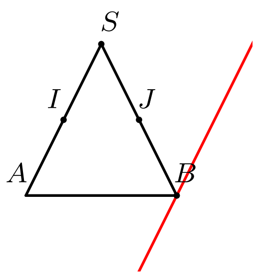
Ce schéma, même grossier sur une feuille de brouillon, permet de répondre à cette question, sans passer par des calculs fastidieux.

On constate que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{IJ}$, $t \in \mathbb{R}$, est (AB) et non (AD).

Par contre, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{JM} = u\overrightarrow{SD}$, $u \in \mathbb{R}$, est bien (JK).

Pour ces deux premières propositions, la réciproque du théorème de Thalès dans les triangles SAB et SBD, confirme que $(AB)//(IJ)$ et $(JK)//(SD)$.

Par ailleurs, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{SA}$, $k \in \mathbb{R}$, ne correspond manifestement pas du tout à (BJ). Pour s'en convaincre, il est toujours possible de dessiner le triangle SAB et de tracer la droite passant par B, parallèle à (SA), comme sur l'image suivante :



Enfin, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{SB} + y\overrightarrow{SC}$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, est le plan (SBC) et non (ABC).

Question 12 : B et C

La proposition A est fausse. Un contre exemple est le repère (O, x, y, z), où $(Ox)\perp(Oz)$, $(Oy)\perp(Oz)$, mais $(Ox)\perp(Oy)$.

La proposition B est évidemment juste.

La proposition C est juste. Si deux droites sont parallèles dans l'espace, alors elles sont coplanaires. Elles admettent alors une infinité de droites perpendiculaires.

La proposition D est fausse. Prenons trois droites parallèles. Les deux premières sont coplanaires. Mais la troisième peut tout à fait être parallèle à ce plan, sans appartenir à celui ci.

Question 13 : D

Soit X une variable aléatoire positive, suivant une loi uniforme sur $[0; N]$ (avec $N \in \mathbb{R}^{+*}$). On a :

$$P(1 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{3-1}{N-0} = \frac{2}{N}$$

D'où :

$$\frac{3}{8} = \frac{2}{N} \Rightarrow N = \frac{8 \times 2}{3} = \frac{16}{3}$$

Attention, $\frac{16}{3} \neq 5,3$. Ainsi la réponse A est fausse.

Question 14 : B

Par définition de la loi exponentielle de paramètre λ :

$$P(t_0 \leqslant X \leqslant t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda t_1}$$

Or, d'après l'énoncé :

$$P(1 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{3}{8}$$

D'où :

$$e^{-\lambda} - e^{-3\lambda} = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow e^{2\lambda} - 1 = \frac{3}{8}e^{3\lambda}$$

$$\Rightarrow e^{2\lambda} - 1 - \frac{3}{8}e^{3\lambda} = 0 \quad (1)$$

Difficile de manipuler cette équation du troisième degrès en e^{λ}. On teste alors une solution valable (c'est à dire $\lambda > 0$) suggérée par l'énoncé, par exemple $\lambda = \ln(2)$:

$$e^{2\ln(2)} - 1 - \frac{3}{8}e^{3\ln(2)} = 4 - 1 - \frac{3}{8} \times 8 = 0$$

Ainsi, $\ln(2)$ est une valeur possible de λ. Autrement dit, $e^{\ln(2)} = 2$ est une valeur possible de e^{λ}. On peut donc simplifier l'expression (1) en factorisant par $\left(e^{\lambda} - 2\right)$. Ainsi, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} e^{2\lambda} - 1 - \frac{3}{8}e^{3\lambda} &= \left(e^{\lambda} - 2\right)\left(-\frac{3}{8}e^{2\lambda} + ae^{\lambda} + \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{3}{8}e^{3\lambda} + ae^{2\lambda} + \frac{1}{2}e^{\lambda} - \frac{3}{4}e^{2\lambda} - 2ae^{\lambda} - 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{8}e^{3\lambda} + \left(a + \frac{3}{4}\right)e^{2\lambda} + \left(\frac{1}{2} - 2a\right)e^{\lambda} - 1$$

Par identification :

$$a + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

D'où :

$$(1) \Leftrightarrow \left(e^{\lambda} - 2\right)\left(-\frac{3}{8}e^{2\lambda} + \frac{1}{4}e^{\lambda} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Reste alors à résoudre :

$$-\frac{3}{8}e^{2\lambda} + \frac{1}{4}e^{\lambda} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{8}X^2 + \frac{1}{4}X + \frac{1}{2} = 0 \quad (\text{où } X = e^{\lambda})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8}\left(3X^2 - 2X - 4\right) = 0 \quad (2)$$

On résout cette équation du second degrés :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 3 \times (-4) = 4 + 48 = 52 > 0$$

Ainsi, (2) admet deux racines X_- et X_+ dans $\mathbb{R}$, telles que :

$$X_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{52}}{6}$$

$$X_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{52}}{6}$$

Or, $X_- < 0$, et comme on a posé $X = e^{\lambda} > 0$, cette solution est à écarter.
Il reste :

$$X_+ = e^{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{52}}{6} = e^{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \ln\left(\frac{2 + \sqrt{52}}{6}\right)$$

On vérifie que $\lambda > 0$, ce qui est évident ici. Conclusion, il existe deux valeurs possibles pour λ : $\ln(2)$ et $\ln\left(\dfrac{2 + \sqrt{52}}{6}\right)$.

Question 15 : D

D'après le cours, pour une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètre n et p :

$$\mathrm{E}(X) = np$$

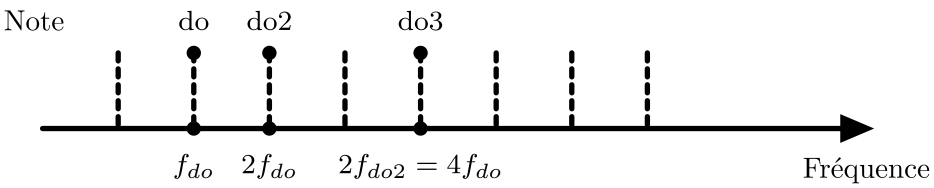
$$\mathrm{V}(X) = np(1 - p)$$

D'où ici :

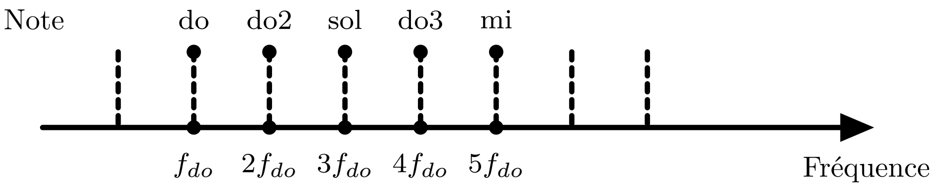
$$\left\{\begin{array}{rcl} 10 & = & np \\ 8 & = & np(1-p) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 10 & = & np \\ 8 & = & 10(1-p) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 10 & = & np \\ p & = & \frac{10-8}{10} = 0,2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} n & = & \frac{10}{p} \\ p & = & 0,2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} n & = & 50 \\ p & = & 0,2 \end{array}\right.$$

Question 16 : B et C
Pour qu'il s'agisse de son musical, il faut que la fréquence des harmoniques soient multiples de la fréquence du fondamental. Hors, sur les spectres des sons 2 et 3, l'écart de fréquence entre 0 et le premier harmonique (= le fondamental) est bien plus grand que l'écart entre le premier et le second harmonique. Ces sons ne sont pas des sons musicaux. Petite particularité du son 4, il est composé uniquement du fondamental. Un tel son est appelé un son «pur».
Question 17 : A et C
La hauteur est la fréquence du fondamental. Le timbre est le nombre d'harmoniques ainsi que leur amplitude. Les sons 1 et 4 ont bien le même fondamental mais des timbres différents.
Question 18 : B et C
Traduisons l'énoncé. Si l'harmonique de rang 1 correspond à une note musicale, l'harmonique de rang 2 correspond à la même note mais plus aiguë. On peut alors se représenter cette affirmation sur un schéma, en considérant do2 et do3, les déclinaisons plus aiguës du do.



L'énoncé indique également que si l'harmonique de rang 1 correspond au «do», alors l'harmonique de rang 3 correspond à un «sol» et celui de rang 5 à un «mi». Complétons le schéma précédent :



L'énoncé indique $f_{sol} = 399$ Hz. Or :

$$f_{sol} = 3f_{do}$$

D'où :

$$f_{do} = \frac{1}{3}f_{sol} = \frac{1}{3} \times 399 = 133 \text{ Hz}$$

Mais, il ne s'agit pas ici d'une note do de la gamme naturelle de do majeur à laquelle appartient le sol proposé ici. Comme on le constate sur les schéma précédents, le sol appartient à la gamme naturelle du do2 au do3 inclus. Calculons alors les fréquences associées :

$$f_{do2} = 2f_{do} = 266 \text{ Hz}$$

$$f_{do3} = 4f_{do} = 532 \text{ Hz}$$

Question 19 : C
Toujours à partir du schéma précédent, on calcule la fréquence du «mi» :

$$f_{mi} = 5f_{do} = \frac{5}{3}f_{sol}$$

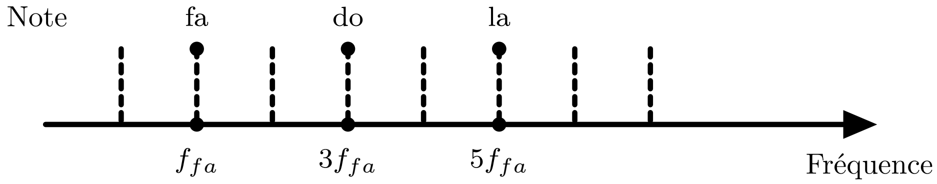
Il s'agit là de la fréquence d'un harmonique du «mi», qui n'appartient pas à la gamme naturelle de do majeur considéré (car $f_{mi} > f_{do3}$). Pour retourner dans la gamme qui nous intéresse, on va devoir aller chercher un «mi» plus grave. Et puisque pour récupérer une note identique plus aiguë il faut multiplier la fréquence par deux d'après l'énoncé, pour récupérer la même note plus grave il faudra diviser la fréquence par deux. Notons mi$_k$ la note mi actuelle (où $k \in \mathbb{N}^*$). On a alors :

$$f_{mi_{k-1}} = \frac{1}{2} f_{mi_k} = \frac{5}{2} f_{do} = \frac{5}{6} f_{sol} = 332.5 \text{ Hz}$$

On vérifie que l'on tombe bien dans la gamme recherchée. C'est le cas car $f_{do2} < f_{mi_{k-1}} < f_{do3}$.

Question 20 : B

L'énoncé indique également que si l'harmonique de rang 1 correspond au «fa», alors l'harmonique de rang 3 correspond à un «do» et celui de rang 5 à un «la». En construisant un schéma similaire aux précédent, on obtient :



D'où :

$$f_{la} = 5 f_{fa} = \frac{5}{3} f_{do} \simeq 443 \text{ Hz}$$

On a $f_{do2} < f_{la} < f_{do3}$, donc il s'agit bien de la note «la» qui apparait dans la gamme naturelle de do majeur pour laquelle la note «sol» a une fréquence de 399 Hz.

Question 21 : B et D

Pour répondre à cette question il suffit de lire le graphique. En se plaçant au point (100 Hz ;70 dB), on tombe sur la courbe «seuil de sensation» des 50 dB. De la même façon, en se plaçant au point (100 Hz ;80 dB), on tombe entre la courbe «seuil de sensation» 60 dB et la courbe 70 dB.

Question 22 : D

Pour une onde mécanique progressive :

$$\lambda = \frac{\text{v}}{f}$$

Où «λ» est la longueur d'onde (en m), «v» la célérité de l'onde (en m/s) et «f» sa fréquence (en s^{-1}). Appliqué ici :

$$\lambda = \frac{340}{100} = 3,4 \text{ m/s}$$

Question 23 : D

En observant le diagramme de Fletcher pour les faibles niveau sonore, on constate qu'il faudra amplifier les basses et les hautes fréquences. Le choix se portera donc sur un filtre coupe-bande.

Question 24 : B

Soit «L_1» le niveau sonore en absence de filtre (en dB), et «L_2» le niveau sonore avec le filtre (en dB). D'après l'énoncé :

$$L_2 - L_1 = -0,2$$

$$\Rightarrow 10 \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) - 10 \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = -0,2$$

$$\Rightarrow 10 \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = -0,2$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = -0,02$$

$$\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 10^{-0,02}$$

Par ailleurs, comme on se place dans le cas du filtre coupe-bande :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A + \left(\frac{f}{f_c} - \frac{f_c}{f}\right)^2}{1 + \left(\frac{f}{f_c} - \frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{I_2}{I_1} + \frac{I_2}{I_1}\left(\frac{f}{f_c} - \frac{f_c}{f}\right)^2 = A + \left(\frac{f}{f_c} - \frac{f_c}{f}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{I_2}{I_1} - A}{1 - \frac{I_2}{I_1}} = \left(\frac{f}{f_c} - \frac{f_c}{f}\right)^2$$

Cette égalité est valable dans les conditions décrites par l'énoncé, soit $f = 500$ ou $6\,000$ et $L_2 - L_1 = -0,2$. Ainsi :

$$\frac{10^{-0,02} - A}{1 - 10^{-0,02}} = \left(\frac{500}{f_c} - \frac{f_c}{500}\right)^2$$

$$\frac{10^{-0,02} - A}{1 - 10^{-0,02}} = \left(\frac{6\,000}{f_c} - \frac{f_c}{6\,000}\right)^2$$

D'où :

$$\left(\frac{500}{f_c} - \frac{f_c}{500}\right)^2 = \left(\frac{6\,000}{f_c} - \frac{f_c}{6\,000}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(500 - \frac{f_c^2}{500}\right)^2 = \left(6\,000 - \frac{f_c^2}{6\,000}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(6\,000 \times 500 - 12 f_c^2\right)^2 = \left(6\,000^2 - f_c^2\right)^2$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 6\,000 \times 500 - 12 f_c^2 & = & 6\,000^2 - f_c^2 \\ & \textbf{ou} & \\ 6\,000 \times 500 - 12 f_c^2 & = & -\left(6\,000^2 - f_c^2\right) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 11 f_c^2 & = & -6\,000(6\,000 - 500) < 0 \Rightarrow \text{impossible} \\ & \textbf{ou} & \\ 13 f_c^2 & = & 6\,000(6\,000 + 500) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow f_c^2 = \frac{6\,000 \times 6\,500}{13} = \frac{2 \times 3 \times 10^3 \times 6,5 \times 10^3}{13} = 3 \times 10^6$$

$$\Rightarrow f_c = \sqrt{3} \times 10^3 \simeq 1,74 \times 10^3 = 1\,740 \text{ Hz}$$

Question 25 : D

Repartons de l'expression du filtre coupe bande :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A + \left(\frac{f}{f_c} - \frac{f_c}{f}\right)^2}{1 + \left(\frac{f}{f_c} - \frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{I_2}{I_1}\left(1+\left(\frac{f}{f_c}-\frac{f_c}{f}\right)^2\right) = A+\left(\frac{f}{f_c}-\frac{f_c}{f}\right)^2$$

$$\Rightarrow A = \frac{I_2}{I_1}\left(1+\left(\frac{f}{f_c}-\frac{f_c}{f}\right)^2\right) - \left(\frac{f}{f_c}-\frac{f_c}{f}\right)^2$$

$$\Rightarrow A = 10^{-0,02}\left(1+\left(\frac{6\,000}{\sqrt{3}\times 10^3}-\frac{\sqrt{3}\times 10^3}{6\,000}\right)^2\right) - \left(\frac{6\,000}{\sqrt{3}\times 10^3}-\frac{\sqrt{3}\times 10^3}{6\,000}\right)^2$$

$$= 10^{-0,02}\left(1+\left(\frac{6}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\right) - \left(\frac{6}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$$= 10^{-0,02}\left(1+\left(\frac{36}{3}+\frac{3}{36}-2\right)\right) - \left(\frac{36}{3}+\frac{3}{36}-2\right)$$

$$= 10^{-0,02}\left(1+12+\frac{1}{12}-2\right) - \left(12+\frac{1}{12}-2\right)$$

$$= 10^{-0,02} + (10^{-0,02}-1)\left(12+\frac{1}{12}-2\right)$$

$$\simeq 0,955 - 0,045\times 10 \simeq 0,5$$

Question 26 : B

Soit «T» la période de rotation du satellite autour de la planète (en jours). A partir des équations du mouvement données par l'énoncé, on constate que S a effectué un tour complet lorsque $0,217t = 2\pi$. On résout alors :

$$0,217T = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{0,217} \simeq \frac{6,28}{0,217} \simeq 30 \text{ j}$$

Question 27 : C

On converti :

$$1 \text{ km/j} = \frac{1\,000}{24\times 60\times 60} \text{ m/s} = \frac{1\,000}{86\,400} \text{ m/s} = \frac{1}{86,4} \text{ m/s}$$

En posant la division à la main, on obtient :

$$\frac{1}{86,4} = 0,0115...$$

Ainsi, la valeur la plus proche d'une vitesse de 1 km par jour est 0,0116 m.s^{-1}.

Question 28 : D

D'après les équations proposées, la trajectoire est assimilée à un cercle. D'où :

$$\text{v} = \frac{2\pi R}{T} = wR$$

Où «v» est la vitesse du satellite (en m/s), «R» la distance SP (en m), «T» la période de rotation du satellite (en s) et «w» la vitesse angulaire du satellite (en rad/s). Ainsi :

$$\text{v} = 0,217\times 3,85\times 10^5 \text{ km/j}$$

$$\simeq 0,8\times 10^5 \text{ km/j}$$

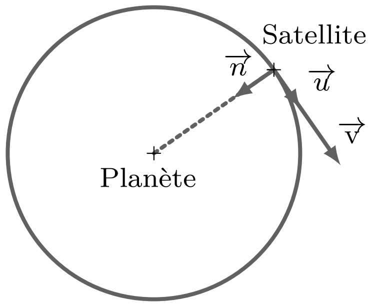
$$\simeq 0,8\times 10^5\times 0,0116 \text{ m/s}$$

$$\simeq 0,9\times 10^3 = 900 \text{ m/s}$$

Conclusion, la vitesse du satellite est comprise entre 300 m.s^{-1} et 3000 m.s^{-1}.

Question 29 : C
L'accélération du satellite ayant une trajectoire circulaire, dans le repère de Frenet, s'écrit :

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\overrightarrow{u} + \frac{\mathrm{v}^2}{R}\overrightarrow{n}$$



Ainsi, en considérant que la vitesse est constante, on obtient :

$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{v}^2}{R}\overrightarrow{n}$$

Le sens de l'accélération est dirigé vers le centre du cercle de la trajectoire.
De plus, la force gravitationnelle exercée par la planète P de masse M sur le satellite S de masse m, s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_{P/S} = -\frac{GMm}{R^2}\overrightarrow{u}_{P\to S}$$

En appliquant la seconde loi de Newton à S, on a :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = m\overrightarrow{a}$$

Or, la seule force considérée ici est la force gravitationnelle. Ce qui donne :

$$\overrightarrow{F}_{P/S} = m\overrightarrow{a}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{GMm}{R^2}\overrightarrow{u}_{P\to S} = m\frac{\mathrm{v}^2}{R}\overrightarrow{n}$$

En projection sur $\overrightarrow{u}_{P\to S}$:

$$\frac{GMm}{R^2} = m\frac{\mathrm{v}^2}{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{GM}{R} = \mathrm{v}^2$$

$$\Leftrightarrow GM = \mathrm{v}^2 R$$

Question 30 : D
A partir de la relation précédente :

$$GM = \mathrm{v}^2 R$$

$$\Rightarrow M = \frac{\mathrm{v}^2 R}{G}$$

$$= \frac{900^2 \times 3,85 \times 10^8}{6,67 \times 10^{-11}}$$

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{80 \times 4}{7} \times 10^{23} \\ &\simeq 45 \times 10^{23} \\ &\simeq 4,5 \times 10^{24} \text{ kg} \end{aligned}$$

Conclusion, la masse de P est comprise entre 10^{24} kg et 10^{26} kg.