Épreuve 2017

Mathématiques & Physique

(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Solutions proposés par : Francis Brunel*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2017. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat de mon travail uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Auteur de l'ouvrage : Annales corrigées du concours GSEA/TSEEAC.

Corrigé 2017

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
CD	BC	B	A	E	B	AB	CD	C	BC	A	E	C	D	E

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	A	D	A	A	BD	D	A	B	AD	B	D	D	C	A

Question 1 : C et D
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit $\left\{f_n : x \mapsto \dfrac{2e^{nx}}{e^{nx}+5}\right\}$. On a alors $\left\{F_n : x \mapsto \dfrac{2}{n}\ln\left(e^{nx}+5\right)\right\}$ une primitive de f_n. Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n}{\ln(5)}\int_0^{\frac{\ln(5)}{n}} f_n(x)\,dx \\ &= \frac{n}{\ln(5)}\left[\frac{2}{n}\ln\left(e^{nx}+5\right)\right]_0^{\frac{\ln(5)}{n}} \\ &= \frac{2}{\ln(5)}\left[\ln\left(e^{\ln(5)}+5\right)-\ln\left(e^0+5\right)\right] \\ &= \frac{2}{\ln(5)}\left[\ln(10)-\ln(6)\right] \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Attention la suite est constante, donc convergente.
Question 2 : B et C
Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^x e^{1-t^2}\,dt \\ &= \int_1^x g(t)\,dt \\ &= G(x)-G(1) \end{aligned}$$

Où G est une primitive de $\left\{g : t \mapsto e^{1-t^2}\right\}$. D'où :

$$f'(x) = G'(x) = g(x) = e^{1-x^2}$$

f' est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est <u>strictement</u> croissante sur $\mathbb{R}$. Elle n'admet donc pas de maximum.
Question 3 : B
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit «B_p» l'évènement «la boule issue du tirage numéro p est blanche», et «N_p» l'évènement «la boule issue du tirage numéro p est noire». On a :

$$\begin{aligned} \frac{9}{22} &= P((B_1\cap N_2)\cup(N_1\cap B_2)) \\ &= P(B_1\cap N_2)+P(N_1\cap B_2) \\ &= \frac{n}{n+3}\times\frac{3}{n+2}+\frac{3}{n+3}\times\frac{n}{n+2} \\ &= \frac{3n+3n}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{6n}{(n+3)(n+2)} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\frac{9}{22} &= \frac{6n}{(n+3)(n+2)}\\ \Leftrightarrow 9(n+3)(n+2) &= 22 \times 6n\\ \Leftrightarrow 3(n+3)(n+2) &= 22 \times 2n\\ \Leftrightarrow 3n^2 + 15n + 18 &= 44n\\ \Leftrightarrow 3n^2 - 29n + 18 &= 0\end{aligned}$$

On résout cette équation du second degrés en n :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 29^2 - 4 \times 3 \times 18 = 841 - 216 = 625 = 25^2 > 0$$

Ainsi, cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{29-25}{6} = \frac{2}{3} \notin \mathbb{N}^*$$
$$n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{29+25}{6} = \frac{54}{6} = 9$$

Cette équation admet une unique solution dans $\mathbb{N}^*$: $n_2 = 9$. Conclusion, il existe un unique entier naturel n pour lequel la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $\frac{9}{22}$.

Question 4 : A

On calcule :

$$\begin{aligned}P_B(A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}\\ &= \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})}\\ &= \frac{0,2 \times 0,7}{0,7 \times 0,2 + (1-0,4) \times (1-0,2)}\\ &= \frac{0,14}{0,14 + 0,48}\\ &= \frac{0,14}{0,62}\\ &= \frac{7}{31}\end{aligned}$$

Question 5 : E

L'algorithme présenté est équivalent au calcul de S tel que :

$$\begin{aligned}S &= \sum_1^6 \frac{1}{k}\\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\\ &= \frac{60+30+20+15+12+10}{60}\end{aligned}$$

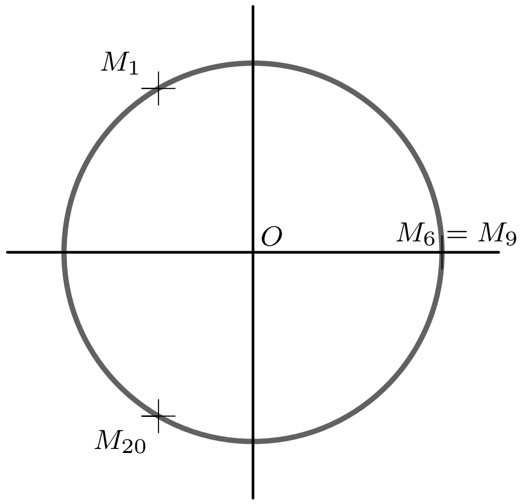
$$= \frac{147}{60}$$
$$= \frac{49}{20}$$
$$= 2,45$$

Question 6 : B

A partir de la formule proposée, on obtient :

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$z_6 = e^{i\frac{12\pi}{3}} = 1$$
$$z_9 = e^{i\frac{18\pi}{3}} = 1 = z_6$$
$$z_{20} = e^{i\frac{40\pi}{3}} = e^{i\frac{(36+4)\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

On dessine alors un schéma approximatif pour se donner une idée, en s'aidant du cercle unité. Ce qui donne le résultat suivant :



Pour se convaincre définitivement, calculons la distance M_1M_{20} :

$$M_1M_{20} = |z_{20} - z_1|$$
$$= \left|e^{i\frac{4\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right|$$
$$= \left|-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|$$
$$= \left|i\sqrt{3}\right|$$
$$= \sqrt{3}$$

Conclusion, O, M_6 et M_9 sont alignés car M_6 et M_9 sont confondus. En revanche, le triangle OM_1M_{20} est seulement isocèle et non équilatéral, car $OM_1 = OM_{20} = 1$ et $M_1M_{20} = \sqrt{3}$.

Question 7 : A et B

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}$$

Alors :

$$\mathrm{v}_n = \sin(u_n) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi, on peut choisir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle non constante telle que $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

De la même manière, on pose $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}$$

Alors :

$$\mathrm{v}_n = \sin(u_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Ainsi, on peut choisir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle non constante telle que $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Question 8 : C et D

Soit $M(x, y, z)$ un point de la sphère de centre $A(1, -1, 0)$ et de rayon 6. On a :

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 6^2$$

Supposons que $M \in (d)$. Alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t+3 \\ y & = & -t+5 \\ z & = & 2 \end{array}\right.$$

Replaçons ces valeurs dans l'équation de la sphère. On obtient :

$$((t+3)-1)^2 + ((-t+5)+1)^2 + 2^2 = 6^2$$
$$\Leftrightarrow (t+2)^2 + (6-t)^2 + 4 = 36$$
$$\Leftrightarrow t^2 + 4 + 4t + 36 + t^2 - 12t + 4 = 36$$
$$\Leftrightarrow 2t^2 - 8t + 8 = 0$$

On résout cette équation du second degrés en t :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0$$

Ainsi, l'équation admet une racine double :

$$t_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$$

Ainsi, il existe un unique point M tel que $M \in (S) \cap (d)$. Ses coordonnées sont :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t_0 + 3 = 2 + 3 = 5 \\ y & = & -t_0 + 5 = -2 + 5 = 3 \\ z & = & 2 \end{array}\right.$$

Conclusion, la sphère et la droite sont tangentes, donc non sécantes.

Question 9 : C

En observant les représentations paramétriques, on constate que le vecteur directeur de (d) a pour coordonnées $(2,-2,6)$, et que le vecteur directeur de (d') a pour coordonnées $(-1,1,-3)$. Ils sont proportionnels. Ainsi, les droites (d) et (d') sont colinéaires. Donc elles sont au moins coplanaires, et elles sont soit parallèles distinctes, soit confondues. Soit $M(3,-1,2)$. Ce point appartient à (d), car il correspond à l'équation paramétrique de (d) évaluée en $t=0$. Supposons que $M \in (d')$. Alors, il existe $t' \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3 & = & -t'-1 \\ -1 & = & t'-1 \\ 2 & = & -3t' \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t' & = & -4 \\ t' & = & 0 \\ 2 & = & -3t' \end{array}\right.$$

Absurde. Ainsi, il existe un point qui appartient à (d) sans appartenir à (d'). Donc les droites ne sont pas confondues. Conclusion, les droites (d) et (d') sont parallèles distinctes, donc non sécantes, et coplanaires.

Question 10 : B et C

On a, par définition, pour une variable aléatoire X de densité de probabilité f, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Et :

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$

Or, dans notre cas, f est nulle sur $]-\infty;0[\cup]\pi;+\infty[$, d'où :

$$\begin{aligned} 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt &= \int_{0}^{\pi} f(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi} m\sin(t)\,dt \\ &= \Big[-m\cos(T)\Big]_0^{\pi} \\ &= -m(-1-1) \\ &\Rightarrow m = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Soit $x \in [0;\pi]$:

$$\begin{aligned} P(X \leqslant x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt \\ &= 0 + \int_0^x f(t)\,dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{2}\sin(t)\,dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos(T)\right]_0^x \\ &= -\frac{1}{2}(\cos(x)-1) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(x)$$

Evidemment, pour $x \in]-\infty; 0[$:

$$P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

Par ailleurs, on évalue :

$$P\left(\frac{\pi}{4} \leqslant X \leqslant \frac{3\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(t)\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos(T)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Question 11 : A

$$Z = \frac{z_1}{z_2}$$

$$= \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$$

$$= \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{6})(2 - 2i)}{2^2 + 2^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + i(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Question 12 : E

$$|z_1| = \left|\sqrt{2} + i\sqrt{6}\right| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(z_1) = \arg\left(\sqrt{2} + i\sqrt{6}\right) = \arg\left(2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= \arg\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Le complexe $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ a pour module $2\sqrt{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{3}$.

$$|z_2| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(z_2) = \arg(2 + 2i) = \arg\left(2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$$= \arg\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

Le complexe $z_2 = 2+2i$ a pour module $2\sqrt{2}$ et pour argument $\dfrac{\pi}{4}$.

Question 13 : C

On en déduit :

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{4\pi-3\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Question 14 : D

D'après la question précédente :

$$Z = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Or, on a trouvé en question 11 :

$$Z = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Ainsi, par identification des parties réelles et imaginaires de Z :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Question 15 : E

La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2 est de la forme :

$$\{y : x \mapsto mx+p,\ (m,p)\in\mathbb{R}^2\}$$

Avec :

$$f'(2) = y'(2)$$
$$\Rightarrow 4\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 2+1\right)^3 = m$$
$$\Rightarrow m = 2\times 2^3 = 16$$

Et :

$$f(2) = y(2)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\times 2+1\right)^4 = 16\times 2 + p$$
$$\Rightarrow p = 2^4 - 32 = -16$$

Conclusion, la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2 est :

$$\{y : x \mapsto 16x-16 = 16(x-1)\}$$

Question 16 : B

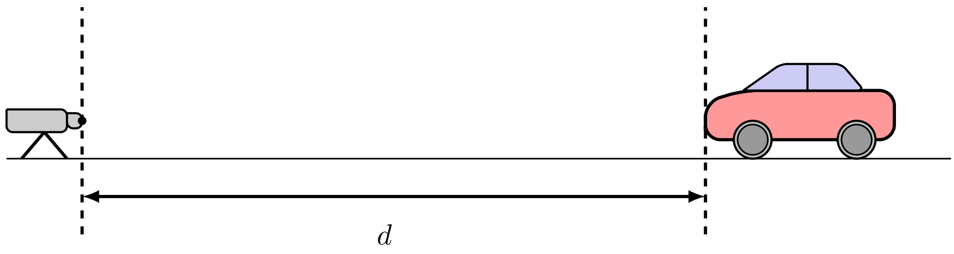
Calculons le temps Δt_a que met l'ultrason pour parcourir la distance aller vers la voiture :

$$\Delta t_a = \frac{d - \mathrm{v}\Delta t_a}{c_S}$$
$$\Rightarrow c_S\Delta t_a = d - \mathrm{v}\Delta t_a$$

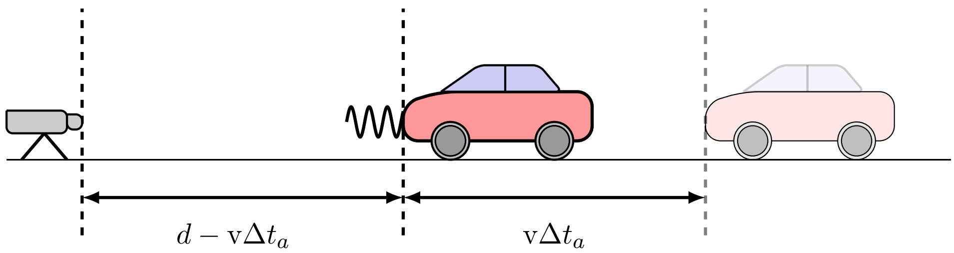
$$\Rightarrow \Delta t_a = \frac{d}{c_S + \mathrm{v}}$$

On constate à la première ligne que la distance parcourue est inférieure à d. Cela s'explique par le fait que la voiture se rapproche, à la vitesse v. Deux petits schéma pour illustrer le phénomène :

Emission du signal



Arrivée du signal sur le véhicule



Notons Δt_r la durée du retour depuis la voiture vers le capteur. On a $\Delta t_r = \Delta t_a$, car l'onde progresse à la même vitesse, sur une distance égale. D'où :

$$\Delta t = \Delta t_a + \Delta t_r = 2\Delta t_a = \frac{2d}{c_S + \mathrm{v}}$$

$$\Rightarrow d = (c_S + \mathrm{v})\frac{\Delta t}{2}$$

Question 17 : A

Notons T_1 l'instant de l'emission de l'impulsion du premier signal, et T_1' l'instant de la reception du premier signal. De même, on note T_2 l'instant de l'emission de l'impulsion du second signal, et T_2' l'instant de la reception du second signal. On a :

$$T_2 = T_1 + \tau$$
$$T_2' = T_1' + \tau'$$

D'où :

$$T_2' - T_2 = T_1' - T_1 + \tau' - \tau$$
$$\Rightarrow \Delta t_2 = \Delta t_1 + \tau' - \tau$$
$$\Rightarrow \tau - \tau' = \Delta t_1 - \Delta t_2$$

Question 18 : D

Notons d_1 la distance de parcours du premier signal, et d_2 la distance de parcours du second signal. On a, d'après la réponse à la question 16 :

$$d_1 = (c_S + \mathrm{v})\frac{\Delta t_1}{2}$$
$$d_2 = (c_S + \mathrm{v})\frac{\Delta t_2}{2}$$

Or, le temps entre l'emission du premier et du second ultrason, la voiture progresse, à la vitesse v. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
d_2 &= d_1 - \tau \mathrm{v} \\
\Rightarrow (c_S + \mathrm{v})\frac{\Delta t_2}{2} &= (c_S + \mathrm{v})\frac{\Delta t_1}{2} - \tau \mathrm{v} \\
\Rightarrow (c_S + \mathrm{v})\frac{(\Delta t_1 - \Delta t_2)}{2} &= \tau \mathrm{v} \\
\Rightarrow (c_S + \mathrm{v})\frac{(\tau - \tau')}{2} &= \tau \mathrm{v} \\
\Rightarrow (c_S + \mathrm{v})\tau - (c_S + \mathrm{v})\tau' &= 2\tau \mathrm{v} \\
\Rightarrow (c_S + \mathrm{v})\tau' &= (c_S + \mathrm{v} - 2\mathrm{v})\tau \\
\Rightarrow \tau' &= \frac{c_S - \mathrm{v}}{c_S + \mathrm{v}}\tau
\end{aligned}$$

Question 19 : A
A partir du résultat précédent :

$$\begin{aligned}
\tau' &= \frac{c_S - \mathrm{v}}{c_S + \mathrm{v}}\tau \\
\Rightarrow (c_S + \mathrm{v})\tau' &= (c_S - \mathrm{v})\tau \\
\Rightarrow \mathrm{v}(\tau' + \tau) &= c_S(\tau - \tau') \\
\Rightarrow \mathrm{v} &= \frac{\tau - \tau'}{\tau + \tau'}c_S
\end{aligned}$$

Question 20 : A
D'après le cours :

$$\lambda = \frac{\mathrm{v}}{f}$$

Où «λ» est la longueur d'onde (en m), «v» la vitesse de l'onde (en m/s), et «f» la fréquence de l'onde (en Hz=s^{-1}). Appliqué à notre cas, on obtient :

$$\lambda = \frac{c_S}{f} = \frac{340}{40 \times 10^3} = 8,5 \times 10^{-3} \text{ m} = 0,85 \text{ cm}$$

Question 21 : B et D
Rappelons nous de l'enseignement de l'effet Doppler. Le bruit d'un véhicule se rapprochant sera perçu plus aigüe qu'il ne l'est réellement. A l'inverse, le bruit d'un véhicule s'éloignant sera perçu plus grave qu'il ne l'est réellement. Ainsi, l'onde mesurée «f'», correspondant à l'onde sonore du véhicule se rapprochant, sera d'une fréquence plus élevée que l'onde émise «f».
Question 22 : D
On note «f_e» (en Hz) la fréquence d'émission des ondes par le radar, «f_r» (en Hz) la fréquence de l'onde réfléchie par la voiture. Ces ondes réfléchies sont ensuite captées par le radar à la fréquence «f'_r» (en Hz).
En utilisant la formule de l'effet Doppler du cours :

— Tout d'abord l'émetteur est fixe (le radar) et le récepteur est mobile (la voiture). Donc :

$$f_r = \frac{c_S + \mathrm{v}}{c_S} f_e$$

— Ensuite, pour l'onde réfléchie, l'émetteur est maintenant mobile (la voiture), et le récepteur est fixe (le radar). Donc :

$$f'_r = \frac{c_S}{c_S - \mathrm{v}} f_r$$

En combinant les équations, on obtient :

$$f'_r = \frac{c_S + \mathrm{v}}{c_S - \mathrm{v}} f_e \Rightarrow \mathrm{v} = \frac{f'_r - f_e}{f'_r + f_e} c_S$$

Ce qui donne, avec les notations de l'énoncé :

$$\mathrm{v} = \frac{f' - f}{f' + f} c_S$$

Une autre façon de retrouver ce résultat :
D'après le résultat de la question 19, on a :

$$\mathrm{v} = \frac{\tau - \tau'}{\tau + \tau'} c_S$$

où «τ» (en s) est l'intervalle de temps entre deux impulsions successives émises par le radar, et «τ'» (en s) est l'intervalle de temps entre les détections des deux impulsions après renvoie (réflexion) par le véhicule.

Prenons $\tau = T$, la période de l'onde ultrasonore émise par le radar. On aura alors $\tau' = T'$ la période de l'onde captée par le radar après réflexion sur le véhicule. C'est bien l'effet Doppler qui va modifier la fréquence (et donc la période) de l'onde. Ainsi :

$$\mathrm{v} = \frac{T - T'}{T + T'} c_S = \frac{\dfrac{1}{f} - \dfrac{1}{f'}}{\dfrac{1}{f} + \dfrac{1}{f'}} c_S = \frac{f' - f}{f' + f} c_S$$

Or, $f = 40$ kHz, $|f' - f| = 10,7$ kHz et $f' > f$. D'où :

$$f' - f = 10,7 \text{ kHz} \Rightarrow f' = 10,7 + f = 50,7 \text{ kHz}$$

Il ne reste plus qu'à effectuer l'application numérique :

$$\begin{aligned} \mathrm{v} &= \frac{10,7}{50,7 + 40} c_S \\ &= \frac{10,7}{90,7} \times 340 \\ &\simeq 40 \text{ m/s} = 40 \times \frac{3\,600}{1\,000} = 144 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Question 23 : A
D'après l'énoncé, a est constante. On pose alors :

$$a = a_0$$

Pour retrouver la vitesse à l'instant t, on intègre entre 0 et t. On note que le véhicule est initialement à l'arrêt. D'où :

$$\mathrm{v}(t) - \mathrm{v}(t=0) = a_0(t-0)$$
$$\Rightarrow \mathrm{v} = a_0 t \quad (1)$$

On intègre une seconde fois pour retrouver la position à l'instant t :

$$x(t) - x(t=0) = \frac{1}{2}a_0 t^2$$
$$\Rightarrow d = \frac{1}{2}a_0 t^2 \quad (2)$$

Or, d'après (1) :

$$a_0 = \frac{\mathrm{v}}{t}$$

En réinjectant dans (2), il vient :

$$d = \frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{v}}{t} \times t^2 = \frac{1}{2}\mathrm{v}t \quad (3)$$

Question 24 : B
D'après le résultat de la question précédente :

$$d = \frac{1}{2}\mathrm{v}t$$
$$\Rightarrow t = \frac{2d}{\mathrm{v}} = \frac{2 \times 400}{72 \times \dfrac{1\,000}{3\,600}} = \frac{2 \times 400}{20} = 40 \text{ s}$$

Attention ici à convertir la vitesse en m/s.
Question 25 : A et D
Appliquons la seconde loi de Newton au véhicule, dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen. On a alors :

$$\overrightarrow{F} = \sum \overrightarrow{F}_{ext} = m\overrightarrow{a}_g$$

Où «$\overrightarrow{F}$» est la résultante des forces s'appliquant au véhicule (en N), «m» sa masse (en kg), et «$\overrightarrow{a}_g$» l'accélération de son centre de gravité (en m/s). Le véhicule sera assimilé à un point, dont l'accélération est constante selon l'énoncé. Ainsi, $\overrightarrow{a}_g = \overrightarrow{a}_0$. En projetant la seconde loi de Newton sur l'axe de déplacement du véhicule, on obtient alors :

$$F = ma_0$$

Or, d'après le résultat (2) de la question 23 :

$$d = \frac{1}{2}a_0 t^2 \Rightarrow a_0 = \frac{2d}{t^2}$$

D'où :

$$F = \frac{2 \times m \times d}{t^2}$$

Mais, d'après le résultat (3) de la question 23 :

$$d = \frac{1}{2}\mathrm{v}t \Rightarrow t = \frac{2d}{\mathrm{v}}$$

D'où :

$$F = \frac{2 \times m \times d}{\left(\frac{2d}{\mathrm{v}}\right)^2} = \frac{2 \times m \times d \times \mathrm{v}^2}{4 \times d^2} = \frac{m \times \mathrm{v}^2}{2 \times d}$$

Question 26 : B
D'après la question précédente :

$$F = \frac{2 \times m \times d}{t^2}$$

En utilisant les valeurs données dans l'énoncé, et d'après le résultat de la question 24 ($t = 40$ s), on obtient :

$$F = \frac{2 \times 1\,200 \times 400}{40^2} = \frac{2\,400 \times 10}{40} = 600 \text{ N}$$

Question 27 : D
L'énergie qu'apporte cette force au véhicule au cours du déplacement d'un point A à un point B correspond à :

$$W_{AB}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{AB}$$

Ici, le vecteur $\overrightarrow{F}$ est parallèle à la direction de déplacement du véhicule, dirigée dans le sens du déplacement puisque le véhicule accélère. Ainsi :

$$W_{AB}(\overrightarrow{F}) = F \times AB$$

En appliquant à notre cas, c'est à dire un déplacement d'une longueur d :

$$W_d(\overrightarrow{F}) = F \times d = 600 \times 400 = 240\,000 \text{ J}$$

Question 28 : D
En posant à la main :

$$4\,608 \times 3\,456 = 15\,925\,248$$

La résolution est d'environ 16 millions de pixels.
Question 29 : C
La taille «m» de l'image vaut :

$$m = \frac{16 \times 10^6 \times 24}{8 \times 1\,024 \times 1\,024} \simeq \frac{2 \times 10^6 \times 24}{1\,000 \times 1\,000} \simeq \frac{48 \times 10^6}{10^6} = 48 \text{ Mio}$$

Attention aux conversions, on multiplie par 24 pour passer des pixels vers les bits puis on divise pour arriver aux Mio.
Question 30 : A
Le nombre d'images sur la carte mémoire vaut :

$$n = \frac{16 \times 1\,024}{48} \simeq \frac{1}{3} \times 1\,000 \simeq 333$$

Attention ici aussi, on convertit la capacité de la carte mémoire en Mio, pour pouvoir ensuite diviser par le poids d'une image, toujours en Mio.