Épreuve 2019

Mathématiques & Physique

(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Solutions proposés par : Francis Brunel*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2019. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat de mon travail uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Auteur de l'ouvrage : Annales corrigées du concours GSEA/TSEEAC.

Corrigé 2019

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	C	A	AD	B	E	D	E	A	BC	D	C	B	D	C

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	A	C	E	B	A	C	D	A	E	A	AD	A	D	A

Question 1 : C
Soit (D) l'ensemble des points M d'affixe z avec $z \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$z = 1 - 2i + e^{i\theta}$$
$$\Rightarrow z - (1 - 2i) = e^{i\theta}$$
$$\Rightarrow |z - (1 - 2i)| = 1$$

Ce qui signifie que la distance entre M et le point d'affixe $(1 - 2i)$ vaut 1. De plus :

$$\arg(z - (1 - 2i)) = \arg\left(e^{i\theta}\right) = \theta \ \ [2\pi]$$

Ce qui signifie que M est situé sur un cercle de centre le point d'affixe $(1 - 2i)$. Conclusion, (D) est un cercle de centre le point d'affixe $(1 - 2i)$ et de rayon 1.
Question 2 : C
Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z avec $z \in \mathbb{C}$ tels que :

$$|z - 1 + i| = |z + 1 + 2i|$$
$$\Rightarrow |z - (1 - i)| = |z - (-1 - 2i)|$$

C'est à dire que la distance de M au point A d'affixe $(1 - i)$ est égale à la distance de M au point C d'affixe $(-1 - 2i)$. Autrement dit, (E) est la médiatrice du segment $[AC]$.
Question 3 : A
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$z + \left|z^2\right| = 7 + i$$
$$\Leftrightarrow x + iy + x^2 + y^2 = 7 + i$$

Par identification de la partie complexe : $y = 1$. Par identification de la partie réelle :

$$x + x^2 + 1 = 7$$
$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

Calculons :

$$\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

Ainsi l'équation en x admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-\mathrm{b} + \sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$
$$x_2 = \frac{-\mathrm{b} - \sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}} = \frac{-1 - 5}{2} = -3$$

Conclusion, l'équation initiale admet deux solutions complexes distinctes $\{-3 + i; 2 + i\}$ dont la partie imaginaire vaut 1.

Question 4 : A et D
Les trois points (A, B, C) ne sont pas alignés et définissent donc bien un plan unique (ABC).
Testons si A appartient au plan définit en proposition A :

$$-x_A - 2y_A - 2z_A + 3 = -1 - 2\times 2 - 2\times(-1) + 3 = -1 - 4 + 2 + 3 = 0$$

C'est le cas. Testons si B appartient au plan définit en proposition A :

$$-x_B - 2y_B - 2z_B + 3 = -1 - 2\times 1 - 2\times 0 + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$$

C'est le cas. Testons si C appartient au plan définit en proposition A :

$$-x_C - 2y_C - 2z_C + 3 = -9 - 2\times(-1) - 2\times(-2) + 3 = -9 + 2 + 4 + 3 = 0$$

C'est le cas. Ainsi, A, B et C appartiennent au plan définit en proposition A. Conclusion, il s'agit du plan (ABC).
Cherchons maintenant une équation paramétrique de la droite (AB). Soit $M = (x, y, z) \in (AB)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& (x_B - x_A)t + x_A \\ y &=& (y_B - y_A)t + y_A \\ z &=& (z_B - z_A)t + z_A \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R} \;\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x &=& (1-1)t + 1 \\ y &=& (1-2)t + 2 \\ z &=& (0-(-1))t - 1 \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1 \\ y &=& 2 - t \\ z &=& t - 1 \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$$

En posant $T = \dfrac{1}{2}t$ on retombe sur l'équation proposée en D.

Question 5 : B
On cherche tout d'abord l'équation de la droite (D') passant par S et perpendiculaire au plan (ABC). La question précédente nous a donné une équation cartésienne du plan (ABC), et ainsi un vecteur normal à ce plan de valeur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ce vecteur sera donc le vecteur directeur de la droite (D'). Soit $M(x, y, z) \in (D')$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -t + x_S \\ y &=& -2t + y_S \\ z &=& -2t + z_S \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R} \;\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -t + 1 \\ y &=& -2t + 1 \\ z &=& -2t + 1 \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$$

Puis, cherchons les coordonnées du point K projeté orthogonal de S sur (ABC). $K \in (D')$, ainsi $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_K &=& -t + 1 \\ y_K &=& -2t + 1 \\ z_K &=& -2t + 1 \end{array}\right.$$

Mais $K \in (ABC)$ d'où :

$$-x_K - 2y_K - 2z_K + 3 = 0$$
$$\Rightarrow -(-t + 1) - 2\times(-2t + 1) - 2\times(-2t + 1) + 3 = 0$$
$$\Rightarrow t - 1 + 4t - 2 + 4t - 2 + 3 = 0$$
$$\Rightarrow 9t = 2$$
$$\Rightarrow t = \frac{2}{9}$$

Il vient alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_K & = & -\dfrac{2}{9}+1 \\ y_K & = & -2\times\dfrac{2}{9}+1 \\ z_K & = & -2\times\dfrac{2}{9}+1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_K & = & \dfrac{7}{9} \\ y_K & = & \dfrac{5}{9} \\ z_K & = & \dfrac{5}{9} \end{array}\right.$$

Comme S' est le symétrique du point S par rapport au plan (ABC) on a :

$$\overrightarrow{KS'} = -\overrightarrow{KS}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{S'}-x_K & = & -(x_S-x_K) \\ y_{S'}-y_K & = & -(y_S-y_K) \\ z_{S'}-z_K & = & -(z_S-z_K) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{S'} & = & 2x_K-x_S \\ y_{S'} & = & 2y_K-y_S \\ z_{S'} & = & 2z_K-z_S \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{S'} & = & 2\times\dfrac{7}{9}-1 \\ y_{S'} & = & 2\times\dfrac{5}{9}-1 \\ z_{S'} & = & 2\times\dfrac{5}{9}-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{S'} & = & \dfrac{5}{9} \\ y_{S'} & = & \dfrac{1}{9} \\ z_{S'} & = & \dfrac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Conclusion, les coordonnées du point S' symétrique du point S par rapport au plan (ABC) sont $\left(\dfrac{5}{9};\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{9}\right)$.

Question 6 : E

Calculons :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2} \\ &= \sqrt{(1-1)^2+(1-2)^2+(0-(-1))^2} \\ &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2} \\ &= \sqrt{(9-1)^2+(-1-2)^2+(-2-(-1))^2} \\ &= \sqrt{64+9+1} = \sqrt{74} \end{aligned}$$

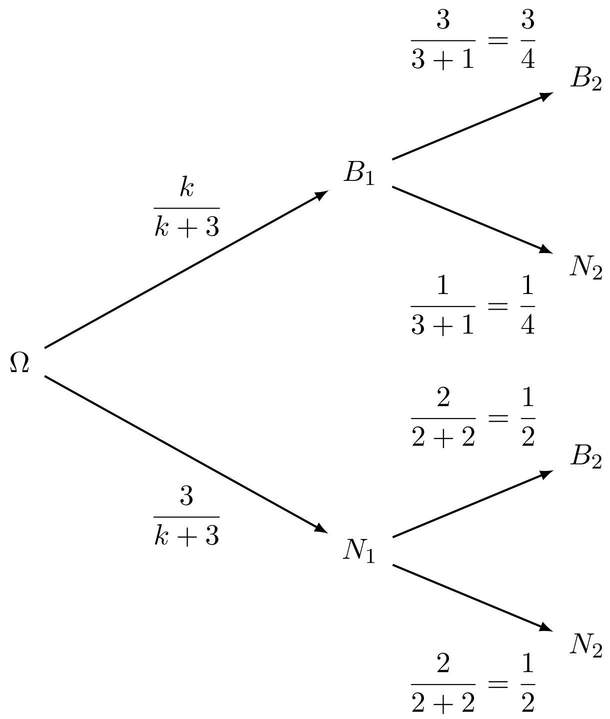
$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2} \\ &= \sqrt{(9-1)^2+(-1-1)^2+(-2-0)^2} \\ &= \sqrt{64+4+4} = \sqrt{72} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Conclusion, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B. De plus, on constate que le triangle n'est ni isocèle, ni équilatéral.

Question 7 : D
La traduction de l'énoncé permet de compléter l'arbre suivant :



D'après la formule des probabilités totales, et à l'aide des informations de l'arbre précédent :

$$\begin{aligned} P\left(B_2\right) &= P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) \\ &= P(B_1) \times P_{B1}(B_2) + P(N_1) \times P_{N1}(B_2) \\ &= \frac{k}{k+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{k+3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3k + 2 \times 3}{4k+12} = \frac{3k+6}{4k+12} \end{aligned}$$

Question 8 : E
On a : $N_2 = \overline{B_2}$. D'où :

$$P(N_2) = P\left(\overline{B_2}\right) = 1 - P(B_2) = 1 - \frac{3k+6}{4k+12} = \frac{k+6}{4k+12}$$

Question 9 : A
A la fin de l'épreuve soit le joueur reçoit 12 euros, diminué de la mise initiale de 8 euros, donc une somme relative de 4 euros, soit le joueur reçoit 0 euro, diminué de la mise initiale de 8 euros, donc une somme relative de -8 euros. Ainsi $X \in \{-8; 4\}$.

Question 10 : B et C
On cherche à déterminer quand le jeu est favorable au joueur, c'est à dire quand l'espérance de gain est supérieure à 0. Rappelons la formule de l'espérance d'une variable aléatoire discrète :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Appliqué à notre cas :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 4 \times P(B_2) - 8 \times P(N_2) \\
&= \frac{4 \times (3k+6)}{4k+12} - \frac{8 \times (k+6)}{4k+12} \\
&= \frac{12k + 24 - 8k - 48}{4k+12} \\
&= \frac{4k-24}{4k+12}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathrm{E}(X) \geqslant 0 \Leftrightarrow 4k - 24 \geqslant 0 \Leftrightarrow k \geqslant 6$$

Ainsi, le jeu est favorable à la banque jusqu'à 5 boules blanches dans l'urne 1, c'est à dire 7 boules blanches au total. Le jeu est neutre pour $6 + 2 = 8$ boules blanches, et il est favorable au joueur pour 7 boules blanches dans l'urne 1, c'est à dire 9 boules blanches au total.

Question 11 : D

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/3} (\sin(x))^n \cos(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{n+1}\left(\sin\left(X\right)\right)^{n+1}\right]_0^{\pi/3} \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{n+1} - \left(\sin\left(0\right)\right)^{n+1}\right] \\
&= \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Question 12 : C

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la propriété de linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
I_{n+2} - I_n &= \int_0^{\pi/3} \frac{(\sin(x))^{n+2}}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/3} \frac{(\sin(x))^n}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/3} \frac{(\sin(x))^n\left((\sin(x))^2 - 1\right)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\pi/3} \frac{(\sin(x))^n(\cos(x))^2}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\pi/3} (\sin(x))^n \cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n+1} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Question 13 : B

Rappelons un résultat qui nous sera utile ici. Pour toute fonction $\{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}\}$:

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

On se lance dans le calcul :

$$I_1 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[-\ln(\cos(X)) \Big]_0^{\pi/3} \\
&= -\left[\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \ln\left(\cos\left(0\right)\right)\right] \\
&= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(1) \\
&= \ln(2)
\end{aligned}
$$

De plus, à partir du résultat de la question précédente :

$$
\begin{aligned}
I_3 &= -\frac{1}{1+1} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1+1} + I_1 \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \ln(2) \\
&= -\frac{3}{8} + \ln(2)
\end{aligned}
$$

Et enfin :

$$
\begin{aligned}
I_5 &= -\frac{1}{3+1} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3+1} + I_3 \\
&= -\frac{1}{4} \times \frac{9}{16} - \frac{3}{8} + \ln(2) \\
&= -\frac{9+3\times 8}{64} + \ln(2) \\
&= \ln(2) - \frac{33}{64}
\end{aligned}
$$

Question 14 : D
Soit $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2} \times \left[1 + \left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2\right] \times \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2} \times \frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2} \times \sin\left[2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]} \\
&= \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\cos(x)}
\end{aligned}
$$

Question 15 : C
En utilisant le résultat précédent, puis la formule fournie par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\pi/3} \frac{(\sin(x))^0}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\ln\left[\tan\left(\frac{X}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]\right]_0^{\pi/3} \\
&= \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right] - \ln\left[\tan\left(0+\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \ln\left[\frac{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right] - \ln(1) \\
&= \ln\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) \\
&= \ln\left[\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\times(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)\times(\sqrt{3}+1)}\right] \\
&= \ln\left[\frac{3+2\sqrt{3}+1}{2}\right] \\
&= \ln\left(2+\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

Et :

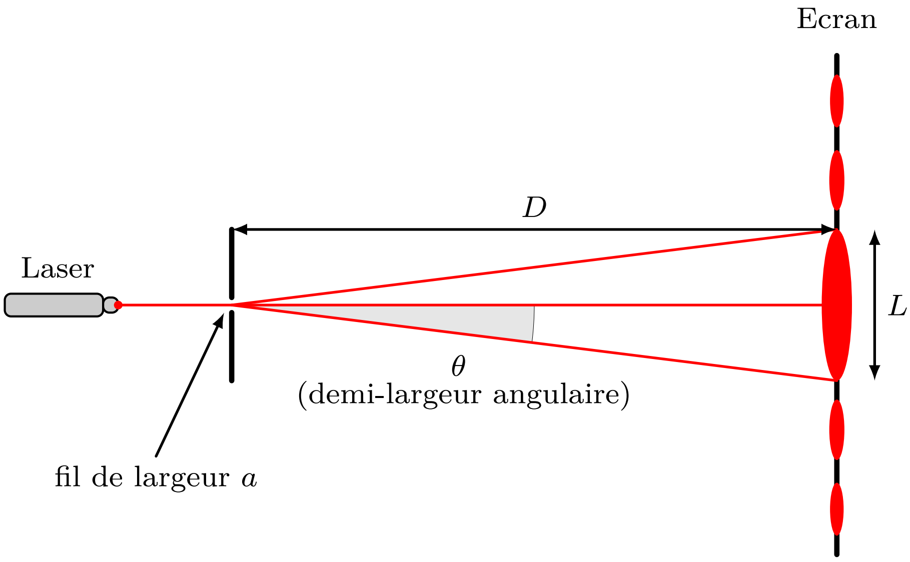
$$\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{1}{0+1}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{0+1} + I_0 \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
I_4 &= -\frac{1}{2+1}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2+1} + I_2 \\
&= -\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right) \\
&= \ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{5\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$

Question 16 : B

Ci-dessous, un schéma pour décrire l'expérience et indiquer les grandeurs caractéristiques :



La demi-largeur angulaire «θ» entre le centre de la bande centrale et la première extinction vérifie :

$$\theta = \frac{\lambda}{a}$$

où «θ» est la demi-largeur angulaire (en radians), «λ» la longueur d'onde de la source de lumière monochromatique incidente (en m), et «a» la largeur du fil (en m). De plus, par trigonométrie, on a la relation suivante :

$$\tan(\theta) = \frac{L}{2D}$$

où «L» est la largeur de la tâche centrale (en m), et «D» la distance du fil à l'écran (en m). Or, «θ» est petit, ainsi, d'après l'énoncé :

$$\tan(\theta) \simeq \theta$$
$$\Rightarrow \frac{\lambda}{a} \simeq \frac{L}{2D}$$

Appliqué à notre cas on obtient :

$$\frac{\lambda}{a} \simeq \frac{1,4 \times 10^{-2}}{2 \times 1} \simeq 0,7 \times 10^{-2} \simeq 7 \times 10^{-3}$$

Calculons maintenant l'incertitude associée à cette valeur à l'aide des informations du document P1-4. On applique la formule :

$$\left(\frac{U(z)}{z}\right)^2 = \left(\frac{U(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{U(y)}{y}\right)^2$$

avec ici :

$$z = \frac{\lambda}{a};\ x = L;\ y = D$$

Ce qui donne :

$$\left(\frac{U\left(\dfrac{\lambda}{a}\right)}{\dfrac{\lambda}{a}}\right)^2 = \left(\frac{U(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{U(D)}{D}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{U\left(\dfrac{\lambda}{a}\right)}{7\times 10^{-3}}\right)^2 = \left(\frac{0,1\times 10^{-2}}{1,4\times 10^{-2}}\right)^2 + \left(\frac{0,001}{1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{U\left(\dfrac{\lambda}{a}\right)}{7\times 10^{-3}}\right)^2 = (0,07)^2 + 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \frac{U\left(\dfrac{\lambda}{a}\right)}{7\times 10^{-3}} \simeq 0,07$$

$$\Rightarrow U\left(\frac{\lambda}{a}\right) \simeq 7\times 10^{-3}\times 0,07 \simeq 0,5\times 10^{-3}$$

Conclusion, la longueur d'onde associé aux électrons du faisceau vérifie :

$$\frac{\lambda}{a} \simeq (7,0 \pm 0,5)\times 10^{-3}$$

Notre estimation est plus précise que la valeur proposée en réponse B. Cela dit, cette proposition B reste juste.

Question 17 : A

D'après Louis de Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e \times \mathrm{v}}$$

où «λ» est la longueur d'onde associé aux électrons du faisceau (en m), «h» la constante de Planck (en J.s), «m_e» la masse de l'électron (en kg), et «v» la vitesse de l'electron (en m.s^{-1}). Ainsi :

$$\mathrm{v} = \frac{h}{m_e \times \lambda}$$

Question 18 : C

La quantité d'énergie mécanique liée à l'électron vaut :

$$\mathrm{E}_m = \mathrm{E}_{\text{cinétique}} + \mathrm{E}_{\text{potentielle}}$$

Entre les positions A et B définies dans le document P1-2 on a alors :

$$\Delta\mathrm{E}_m = \Delta\mathrm{E}_{\text{cinétique}} + \Delta\mathrm{E}_{\text{potentielle}}$$
$$= \frac{1}{2}\times m_e\left(\mathrm{v}_B^2 - \mathrm{v}_A^2\right) + q\left(\mathrm{V}_B - \mathrm{V}_A\right)$$

où «m_e» est la masse de la particule (en kg), «v_A» et «v_B» les vitesses de la particule aux positions A et B (en m.s^{-1}), «q» la charge de la particule (en C), et «V_A» et «V_B» les potentiels électriques aux positions A et B (en V). Prenons l'hypothèse d'absence de frottements. Alors le système ne subit pas de forces non conservatrices, ainsi d'après le principe de conservation de l'énergie :

$$\Delta \mathrm{E}_m = 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times m_e \left(\mathrm{v}_B^2 - \mathrm{v}_A^2\right) + q\left(\mathrm{V}_B - \mathrm{V}_A\right) = 0$$

Le document P1-2 indique que la tension électrique est appliquée de façon à ce que l'armature au niveau du point A soit chargée négativement (et donc l'armature au point B chargée positivement). Ce qui signifie que $\mathrm{V}_B - \mathrm{V}_A = U$. De plus, les électrons partent de A avec une vitesse quasi nulle donc $\mathrm{v}_A = 0$, et ils sont éjectés en B avec une vitesse $\vec{\mathrm{v}}$ donc $\mathrm{v}_B = \mathrm{v}$. On considère un électron, donc de charge $q = -e$. Ainsi :

$$\frac{1}{2} \times m_e \left(\mathrm{v}^2 - 0\right) - e \times U = 0$$
$$\Rightarrow U = \frac{m_e \mathrm{v}^2}{2e}$$

Question 19 : E
L'application numérique donne :

$$U = \frac{m_e \mathrm{v}^2}{2e}$$
$$= \frac{9,1 \times 10^{-31} \times \left(10^6\right)^2}{2 \times 1,6 \times 10^{-19}}$$
$$\simeq \frac{9 \times 10^{(-31+12)}}{3 \times 10^{-19}} \simeq 3 \text{ V}$$

Question 20 : B
On a d'après le cours :

$$F = |q| \times E$$

où «F» est la valeur de la force électrostatique (en N), «q» la charge électrique de la particule (en C), et «E» la valeur du champ électrique (en V.m^{-1}). Or la particule considérée est un électron donc $|q| = e$. De plus :

$$E = \frac{U}{d}$$

où «U» est la différence de potentiel entre les deux armatures (en V), et «d» la distance entre les armatures (en m). Ainsi :

$$F = \frac{e \times U}{d}$$

Question 21 : A
L'application numérique donne :

$$F = \frac{e \times U}{d} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 3}{10^{-2}} \simeq 5 \times 10^{-17} \text{ N}$$

Question 22 : C
La différence de potentiel entre les deux armatures vaut $U = 3$ V d'après le résultat de la question 19. De plus, la distance entre les deux armatures est de $d = 10^{-2}$ m d'après la question 20. Ainsi, la valeur du champ électrostatique dans le canon vaut :

$$E = \frac{U}{d} = \frac{3}{10^{-2}} = 3 \times 10^2 \text{ V.m}^{-1}$$

Question 23 : D

En appliquant la seconde loi de Newton à l'électron de masse «m_e» (en kg), de charge «e» (en Coulomb) et d'accélération «$\overrightarrow{a}$» (en m/s^2), dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen, on a :

$$\sum \overrightarrow{F} = m_e \overrightarrow{a}$$

La seule force considérée ici est la force électrostatique «$\overrightarrow{F}$», la force de pesanteur étant négligée devant celle ci. Ainsi :

$$m_e \overrightarrow{a} = \overrightarrow{F} = e\frac{U}{d}\overrightarrow{u}_{+\rightarrow -}$$

où «$\overrightarrow{u}_{+\rightarrow -}$» est le vecteur unitaire orienté perpendiculairement par rapport aux plaques, dirigé vers les potentiels décroissants.
En norme, on a pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$m_e a(t) = e \times \frac{U}{d}$$
$$\Rightarrow a(t) = e \times \frac{U}{m_e d}$$

En intégrant entre 0 et t :

$$\text{v}(t) - \text{v}(t=0) = e \times \frac{U}{m_e d} t$$
$$\Rightarrow \text{v}(t) = e \times \frac{U}{m_e d} t$$

En intégrant une seconde fois entre 0 et t :

$$x(t) - x(t=0) = \frac{1}{2} \times e \times \frac{U}{m_e d} t^2$$

En considérant que l'origine des x est confondu avec la position de départ de la particule, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$x(t) = \frac{1}{2} \times e \times \frac{U}{m_e d} t^2$$

Plaçons nous alors à l'instant où la particule arrive sur l'armature B. Alors :

$$d = \frac{1}{2} \times e \times \frac{U}{m_e d}\Delta t^2 \Rightarrow d^2 = \frac{U \times e}{2m_e}\Delta t^2$$

Or, d'après la question 18 on a :

$$U = \frac{m_e \text{v}^2}{2e} \Rightarrow \frac{U \times e}{m_e} = \frac{\text{v}^2}{2}$$

D'où :

$$d^2 = \frac{U \times e}{2m_e}\Delta t^2 = \frac{\text{v}^2}{4}\Delta t^2$$
$$\Rightarrow \Delta t^2 = \frac{4d^2}{\text{v}^2}$$
$$\Rightarrow \Delta t = \frac{2d}{\text{v}}$$

Question 24 : A
L'application numérique donne :

$$\Delta t = \frac{2d}{\text{v}} = \frac{2 \times 10^{-2}}{10^6} = 2 \times 10^{-8} = 20 \text{ ns}$$

Question 25 : E
Par définition :

$$T = \frac{1}{f}$$

avec «T» la période de l'onde (en s), et «f» la fréquence de propagation de l'onde (en Hz).
L'application numérique donne :

$$T = \frac{1}{12} \simeq 0,08 = 80 \times 10^{-3} \text{ s} = 80 \text{ ms}$$

Question 26 : A
Pour une onde :

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow c = \lambda \times f$$

où «λ» est la longueur d'onde (en m), «c» la célérité de propagation de l'onde (en m.s^{-1}), et «f» la fréquence de propagation de l'onde (en Hz). L'application numérique donne :

$$c = 4,4 \times 10^{-3} \times 12 \simeq 50 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1} = 50 \text{ mm.s}^{-1}$$

Question 27 : A et D
D'après l'énoncé, la puissance du radiateur est de 2 kW. Calculons l'énergie E qu'il fourni pendant un quart d'heure :

$$E = 2\,000 \times 15 \times 60 = 1\ 800\ 000 \text{ J}$$

Pour convertir en W.h, il suffit de diviser ce résultat par 3 600. D'où :

$$E = \frac{1\ 800\ 000}{3\ 600} = 500 \text{ W.h}$$

Question 28 : A
Calculons la quantité d'énergie à fournir, par an, pour la pièce entière :

$$Q_{année} = 80\ 000 \times 25 = 2\ 000\ 000 \text{ W.h}$$

Ainsi, le chauffage fonctionnant 200 jours par an, pour une journée :

$$Q_{journée} = \frac{Q_{année}}{200} = \frac{2\ 000\ 000}{200} = 10\ 000 \text{ W.h}$$

Le chauffage, d'après l'énoncé, fourni une puissance de 2 kW donc délivre 2 kW.h de chaleur pour chaque heure de fonctionnement. Conclusion, il n'aura besoin de fonctionner que cinq heures par jour couvrir les besoin en chauffage.

Question 29 : D
Soit $m = \rho V$ la masse d'huile dans le radiateur (en kg). On a par définition :

$$Q = cm(\theta_{final} - \theta_{initial})$$

où «Q» est la quantité de chaleur reçue par le radiateur (en J), «c» la capacité thermique massique de l'huile (en J.kg^{-1}.K^{-1}), et «θ_{final}» et «$\theta_{initial}$» les températures de l'huile à l'état final et initial (en K). Ainsi :

$$Q = c\rho V(\theta_{final} - \theta_{initial}) = 2\ 000 \times 0,80 \times 10 \times (15 - 45) = -480\ 000 \text{ J}$$

Il s'agit de l'énergie reçue par le radiateur. L'énergie transmise par le radiateur vaut donc $-Q = 4,8 \times 10^5$ J.

Question 30 : A

L'énergie potentielle de pesanteur vaut :

$$E_p = mgz$$

où «m» est la masse de l'objet (en kg), «g» l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre (en m.s^{-2}), et «z» la hauteur de chute (en m). D'après l'énoncé, la hauteur de chute est ici de 100 m. On cherche alors m tel que :

$$4,8 \times 10^5 = m \times 10 \times 100$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{4,8 \times 10^5}{10 \times 100} = 4,8 \times 10^2 = 480 \text{ kg}$$