Épreuve 2013
Mathématiques
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques du concours GSEA/TSEEAC 2013.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 2h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

Questions liées :
1 à 7
8 à 11
13 à 19
20 à 25

PARTIE I

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-5, 5]$ par $f(x) = x(x+1)e^{-2x}$, e désignant la fonction exponentielle. Soient α un nombre réel strictement compris entre 0 et 1/2 et β un nombre réel strictement compris entre -2 et -1

Question 1 :

La fonction dérivée f' de la fonction f est définie pour tout x appartenant à l'ensemble I par

A - $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$
B - $f'(x) = -2(2x+1)e^{-2x}$
C - $f'(x) = (-2x^2+1)e^{-x}$
D - $f'(x) = (x^2+3x+1)e^{-2x}$

Question 2 :

La fonction dérivée f' de la fonction f a pour valeur, au point $x = 0$

A - $f'(0) = 0$
B - $f'(0) = 1$
C - $f'(0) = -2$
D - $f'(0) = -1$

Question 3 :

On note C_f la courbe représentant f dans un repère orthonormé. On a

A - C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
B - C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{2}}$
C - C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{2}}$
D - C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse -1

Question 4 :

La fonction f est

A - Croissante sur $[0, 5]$
B - Décroissante sur $[-5, 0]$
C - Croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, décroissante sur les intervalles $\left[-5, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 5\right]$
D - Décroissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, croissante sur les intervalles $\left[-5, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 5\right]$

Question 5 :

On en déduit que

A - $f(\alpha) > 0 > f(\beta)$ car la fonction f est croissante sur I

B - $f(-2) > f(\beta) > 0$ car la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left[-5, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

C - $f(0) > f(\alpha) > 3e^{-1}$ car la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

D - $f(0) < f(\alpha) < \dfrac{3}{4e}$ car la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Question 6 :

On établit que l'équation $f(x) = 0$

A - n'admet pas de solution sur l'intervalle $[\alpha, 5]$

B - n'admet pas de solution sur l'intervalle $[\beta, 5]$

C - admet deux solutions sur l'intervalle $[\beta, \alpha]$

D - n'admet qu'une solution sur l'intervalle $[\beta, \alpha]$

Question 7 :

On montre que la fonction f

A - admet un maximum au point d'abscisse $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

B - admet un minimum au point d'abscisse $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

C - admet un minimum au point d'abscisse $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

D - admet un minimum au point d'abscisse $x = 0$

PARTIE II

Un organisme de jeu va récompenser un heureux gagnant. Celui-ci doit faire le choix entre les deux propositions suivantes pour lesquelles il s'agit à chaque fois d'une somme d'argent versée annuellement, et ceci à partir de l'année 2012 et pendant 10 ans. Le bénéfice du jeu se terminera par conséquent en 2021, et le gagnant touchera alors le dernier versement. S'il choisit la proposition A, il touchera 30 000 euros en 2012, puis chaque année, la somme augmentera de 5% par rapport à l'année précédente.

En choisissant la proposition B, 30 000 euros lui seront versés en 2012, puis chaque année, la somme augmentera de 1750 euros par rapport à l'année précédente.

Pour l'aider à choisir la solution la plus avantageuse, on note a_n la somme, en euros, versée pendant l'année 2012+n s'il choisit la proposition A, et b_n la somme en euros, versée pendant l'année 2012+n s'il choisit la proposition B.

Question 8 :

On a

A - $a_0 = b_0 = 30\,000$

B - $a_1 = b_1 = 30\,000$

C - a_9 et b_9 correspondent aux sommes versées en 2020

D - a_9 et b_9 correspondent aux sommes versées en 2021

Question 9 :

On établit que

A - $a_{n+1} = 0,95a_n$ pour tout n entier naturel

B - $a_{n+1} = a_n + 0,05$ pour tout n entier naturel

C - $b_{n+1} = b_n + 0,05b_n$ pour tout n entier naturel

D - $b_{n+1} = 1750b_n$ pour tout n entier naturel

Question 10 :

On en déduit que

A - la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 1,05 et de premier terme $a_0 = 30\,000$

B - la suite (a_n) est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme $a_0 = 30\,000$

C - la suite (b_n) est une suite arithmétique de raison 1750 et de premier terme $b_0 = 30\,000$

D - la suite (b_n) est une suite géométrique de raison 1750 et de premier terme $b_0 = 30\,000$

Question 11 :

On a

A - $a_n \leqslant b_n$ pour tout n entier naturel

B - $b_n \leqslant a_n$ pour tout n entier naturel

C - $a_n < b_n$ pour tout n entier naturel non nul

D - $a_9 > b_9$

PARTIE III

Le concombre est composé de masse solide et d'eau. Un concombre de 300 grammes est cueilli à 98% d'eau. Après transport, à la livraison, il ne contient plus que 97% d'eau.

Question 12 :

La masse de ce concombre à la livraison est

A - 200 grammes

B - 300 grammes

C - 6 grammes

D - 9 grammes

PARTIE IV

Un année scolaire donnée, on compte 300 000 étudiants dans l'enseignement supérieur en classe préparatoire aux grandes écoles (CPGE) ou en section de techniciens supérieurs (STS). Parmi l'ensemble de ces étudiants, on compte 180 000 garçons.
25% des garçons sont en CPGE
80% des filles sont en STS
On choisit un de ces étudiants au hasard et on suppose que chaque étudiant a la même probabilité d'être choisi. On défini les évènements suivants :
A :«l'élève choisi est en CPGE»
G :«l'élève choisi est un garçon»

On note respectivement $\overline{\text{A}}$ et F=$\overline{\text{G}}$ les évènements contraires des évènements A et G.

Question 13 :

On en déduit que

- **A -** seuls 45 000 élèves sont en CPGE
- **B -** moins de 70 000 élèves sont en CPGE
- **C -** moins de 60 000 élèves sont en CPGE
- **D -** plus de 70 000 élèves sont en CPGE

Question 14 :

La probabilité de l'évènement

- **A -** G vaut P(G)=3/5
- **B -** G vaut P(G)=1/6
- **C -** $\overline{\text{G}}$ vaut P($\overline{\text{G}}$)=1-P(G)=5/6
- **D -** $\overline{\text{G}}$ vaut P($\overline{\text{G}}$)=2/3

Question 15 :

L'évènement

- **A -** A∩G représente l'évènement «l'élève choisi est un garçon ou est en CPGE»
- **B -** A∩G représente l'évènement «l'élève choisi est un garçon et est en CPGE»
- **C -** A∪G représente l'évènement «l'élève choisi est un garçon et est en CPGE»
- **D -** A∪G représente l'évènement «l'élève choisi est un garçon ou est en CPGE»

Question 16 :

La probabilité que l'élève choisi soit un garçon en CPGE est égale à

- **A -** $P(G \cap A)=P(G)P_G(A)=(3/5)(1/4)=3/20$
- **B -** $P(G \cap A)=P(G)/P_G(A)=(3/5)/(1/4)=12/5$
- **C -** $P_G(A)=1/4$
- **D -** $P_A(G)=1/5$

Question 17 :

La probabilité que l'élève choisi soit une fille en CPGE est égale à

A - $P(F \cap A)=1-P(G \cap A)=1-P(G)P_G(A)=1-(3/20)=17/20$

B - $P(F \cup A)=1-P(G \cap A)=1-P(G)P_G(A)=1-(3/20)=17/20$

C - $1-P_G(A)=3/4$

D - $P_F(A)=1/5$

Question 18 :

La probabilité que l'élève choisi soit en CPGE est égale à

A - $P(A)=P(G \cup A) + P(F \cup A)$ d'après le théorème des probabilités totales

B - $P(A)=P(G \cap A) + P(F \cap A)$ d'après le théorème des probabilités totales

C - $P(A)=(3/20)+(2/25)=0{,}23$

D - $P(A)=(1/4)+(1/5)=9/20=0{,}45$

Question 19 :

On en déduit que

A - $P_A(G)=P(G \cap A)/P(A)=15/23$

B - $P_A(G)=P(G \cap A)P(A)=69/2000$

C - $P_{\overline{A}}(F)=P(F \cap \overline{A})/(1-P(A))=32/77$

D - $P_{\overline{A}}(F)=1-P_A(G)=1-(15/23)=8/23$

PARTIE V

On considère la fonction g définie sur l'intervalle J=[(1/2),8] par
$g(x) = 2x-3-4\ln(x)$, ln désignant la fonction logarithme. On note C_g sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Question 20 :

La fonction dérivée g' de la fonction g est défini pour tout x appartenant à l'intervalle J par

A - $g'(x) = 2 - 4\ln(x)/x$

B - $g'(x) = 2(x-2)/x$

C - $g'(x) = 2(1-2x)$

D - $g'(x) = -(x+4)/x$

Question 21 :

La fonction dérivée g' de la fonction g

A - ne s'annule pas sur J

B - s'annule en 2 points de l'intervalle J

C - s'annule au point d'abscisse $x = 1/2$

D - s'annule au point d'abscisse $x = 2$

Question 22 :

La fonction g est

A - croissante sur J

B - décroissante sur l'intervalle [(1/2),2] et croissante sur l'intervalle [2,8]

C - croissante sur l'intervalle [(1/2),2] et décroissante sur l'intervalle [2,8]

D - décroissante sur J

Question 23 :

supposant que e=2,718 on en déduit que

A - $g(1) > g(2) > 0$ car la fonction g est décroissante sur l'intervalle [(1/2),2]

B - $g(1) < g(2) < 0$ car la fonction g est croissante sur l'intervalle [(1/2),2]

C - $g(e^2) > 0 > g(1) > g(2)$ car la fonction g est décroissante sur l'intervalle [(1/2),2] et croissante sur l'intervalle [2,8]

D - $g(e) > 0 > g(1) > g(2)$ car la fonction g est décroissante sur l'intervalle [(1/2),2] et croissante sur l'intervalle [2,8]

Question 24 :

On établit que l'équation $g(x) = 0$

A - n'admet qu'une seule solution sur l'intervalle [2,8]

B - n'admet pas de solution sur l'intervalle J

C - admet une solution sur l'intervalle [1,2]

D - admet deux solutions sur l'intervalle J

Question 25 :

On montre que la courbe C_g

A - admet une tangente horizontale au point d'abscisse $x = 2$ d'équation $y = 1 - 4\ln(2)$

B - admet une tangente horizontale au point d'abscisse $x = 1$

C - admet une tangente verticale au point d'abscisse $x = 1$

D - admet une tangente au point d'abscisse $x = 1$ définie par la droite d'équation $y = -2x+1$