Épreuve 2014

Mathématiques

(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques du concours GSEA/TSEEAC 2014.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 2h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

Questions liées :
1 à 7
8 à 11
12 à 14
15 à 25

NOTATIONS

Les lettres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ désignent respectivement les ensembles des réels et des entiers naturels.

PARTIE I

En 2013, une forêt possède 10 000 arbres. Dans le but d'entretenir cette forêt vieillissante, l'office chargé de l'entretien décide de supprimer chaque année 5% des arbres existants en les abattant, et de replanter chaque année 600 arbres. Soit u_n le nombre d'arbres l'année 2013+n.

Question 1 :

On a :

A - u_0=10 000
B - u_0=10 100
C - u_1=10 195
D - u_1=1 100

Question 2 :

La suite (u_n) est définie par la relation de récurrence :

A - $u_{n+1} = 0,95u_n - 600$
B - $u_{n+1} = 0,05u_n - 600$
C - $u_{n+1} = 0,95u_n + 600$
D - $u_{n+1} = 0,05u_n + 600$

Question 3 :

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{v}_n = u_n - 12\,000$. La suite (v_n) :

A - est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $\mathrm{v}_0 = -2\,000$
B - est une suite géométrique de raison $q = 0,05$ et de premier terme $\mathrm{v}_0 = 2\,000$
C - est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $\mathrm{v}_0 = 2\,000$
D - est une suite géométrique de raison $q = 0,05$ et de premier terme $\mathrm{v}_0 = -2\,000$

Question 4 :

On en déduit :

A - $u_n = 2\,000 \times 0,95^n + 12\,000$
B - $u_n = -2\,000 \times 0,05^n + 12\,000$
C - $u_n = -2\,000 \times 0,95^n + 12\,000$
D - $u_n = 2\,000 \times 0,05^n + 12\,000$

Question 5 :

La suite (u_n) est :

A - croissante, majorée par 12 000

B - décroissante, majorée par 12 000

C - décroissante, minorée par 10 000

D - croissante, minorée par 10 000

Question 6 :

On en déduit :

A - $\lim_{n\to+\infty} u_n = 10\,000$

B - $\lim_{n\to+\infty} u_n = 9\,000$

C - $\lim_{n\to+\infty} u_n = 12\,000$

D - $\lim_{n\to+\infty} u_n = 11\,000$

Question 7 :

En 2020, la forêt comptera M arbres, avec :

A - $M = 2\,000 \times 0,95^7 + 12\,000$

B - $M = 2\,000 \times 0,95^8 + 12\,000$

C - $M = -2\,000 \times 0,05^7 + 12\,000$

D - $M = -2\,000 \times 0,05^8 + 12\,000$

PARTIE II

A la caisse d'un magasin, le temps d'attente exprimé en secondes d'un client pris au hasard est modélisé par une variable aléatoire T, laquelle suit une loi exponentielle de paramètre $\mu = 0,008$.

Question 8 :

La probabilité p_1 que l'attente en caisse d'un client dure moins d'une minute est :

A - $p_1 = 1 - e^{-0,008}$

B - $p_1 = 0,008e^{-0,008}$

C - $p_1 = 1 - e^{-0,48}$

D - $p_1 = 0,48e^{-0,48}$

Question 9 :

La probabilité p_2 que l'attente en caisse d'un client dure plus de 3 min est :

A - $p_2 = 1 - e^{-0,024}$

B - $p_2 = 0,024e^{-0,024}$

C - $p_2 = 1 - e^{-1,44}$

D - $p_2 = e^{-1,44}$

Dans toute la suite, on utilisera 86,64 comme valeur approchée de 125ln(2).

Question 10 :

Le temps d'attente moyen T_0 en caisse est :

A - $T_0 = 125$ min

B - $T_0 = 86$ min 39 s

C - $T_0 = 2$ min 05 s

D - $T_0 = 1$ min $26,64$ s

Question 11 :

Sachant que le temps médian T_1 correspond à $P(t > T_1) = 0,5$, on en déduit :

A - $T_1 = 125$ min

B - $T_1 = 86$ min 39 s

C - $T_1 = 2$ min 05 s

D - $T_0 = 1$ min $26,64$ s

PARTIE III

On se propose de déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y'+2y = x$, où y désigne une fonction de la variable x.

Question 12 :

L'équation différentielle homogène $(E_0) : y' + 2y = 0$ admet pour solution générale :

A - $y(x) = Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$

B - $y(x) = (2C - 1)e^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$

C - $y(x) = (5C + 3)e^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$

D - $y(x) = -2x + C$, $C \in \mathbb{R}$

Question 13 :

Une solution particulière de l'équation (E) est $u(x)$, avec

A - $u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

B - $u(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

C - $u(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

D - $u(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

Question 14 :

En admettant que toute solution de (E) est de la forme $\varphi(x) = u(x) + y(x)$, avec $y(x)$ solution de (E_0), la solution φ_0 de (E) vérifiant $\varphi_0(0) = \dfrac{3}{4}$ est :

A - $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}e^{-2x}$

B - $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} + e^{-2x}$

C - $\varphi_0(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}e^{2x}$

D - $\varphi_0(x) = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} + e^{2x}$

PARTIE IV

Question 15 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} + e^{-2x}$, de courbe représentative (Γ).

A - La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$

B - La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^-$

C - La fonction f est définie, continue et dérivable uniquement sur $\mathbb{R}^{+*}$

D - La fonction f est définie, continue et dérivable uniquement sur $\mathbb{R}^{-*}$

Question 16 :

On a :

A - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

B - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

C - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$

D - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$

Question 17 :

En admettant que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{2x} = 0$, on obtient :

A - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$

B - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$

C - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

D - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Question 18 :

Le calcul de la dérivée de f nous donne :

A - $f'(x) = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$

B - $f'(x) = -\frac{1}{2} - e^{-2x}$

C - $f'(x) = \frac{1}{2} - 2e^{-2x}$

D - $f'(x) = \left(-x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x}$

Question 19 :

L'équation $f'(x) = 0$ admet pour solution $\overline{x}$, avec :

A - $\overline{x} = \frac{1}{2}$

B - $\overline{x} = \frac{\ln(2)}{2}$

C - $\overline{x} = \ln(2)$

D - $\overline{x} = -\frac{1}{2}$

Question 20 :

A - La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$

B - La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; \ln(2)[$

C - La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 1[$

D - La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Question 21 :

La tangente à (Γ) en 0 est la droite (T) d'équation

A - $y(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

B - $y(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

C - $y(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$

D - $y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

Question 22 :

On considère la droite (D) d'équation $y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

A - La courbe (Γ) est au dessous de (D)

B - La courbe (Γ) est au dessus de (D)

C - Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que si $x \in]-\infty; x_0[$, (Γ) est au dessous de (D) et au dessus sinon

D - Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que si $x \in]-\infty; x_0[$, (Γ) est au dessus de (D) et au dessous sinon

Question 23 :

Pour m un nombre réel strictement supérieur à $\ln(2)$, on note $A(m)$ l'aire de la partie de plan délimitée par la courbe (Γ), la droite (D) et les plans d'équation $x = \ln(2)$ et $x = m$. On a :

A - $A(m) = \displaystyle\int_m^{\ln(2)} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + e^{-2x}\right) \mathrm{d}x$

B - $A(m) = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{m} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + e^{-2x}\right) \mathrm{d}x$

C - $A(m) = \displaystyle\int_m^{\ln(2)} e^{-2x}\,\mathrm{d}x$

D - $A(m) = \displaystyle\int_m^{\ln(2)} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) \mathrm{d}x$

Question 24 :

On en déduit que :

A - $A(m) = \dfrac{1}{4}\left[(\ln(2) + m - 1)\,(\ln(2) - m) + 2e^{-2m} - \dfrac{1}{2}\right]$

B - $A(m) = \dfrac{1}{4}\left[(m - 1 + \ln(2))(m - \ln(2)) + \dfrac{1}{2} - 2e^{-2m}\right]$

C - $A(m) = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{2} - 2e^{-2m}\right]$

D - $A(m) = \dfrac{1}{4}\left[(\ln(2) + m - 1)(\ln(2) - m)\right]$

Question 25 :

En faisant tendre m vers l'infini, on obtient :

A - $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} A(m) = +\infty$

B - $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} A(m) = -\infty$

C - $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} A(m) = 0$

D - $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} A(m) = \frac{1}{8}$