Épreuve 2016
Mathématiques
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques du concours GSEA/TSEEAC 2016.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 2h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

Questions liées :
1 à 7
8 à 10
12 à 14
17 à 19
20 à 25

PARTIE I

Nous rappelons que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ où i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et x est un nombre réel.
Si a est un nombre complexe, $|a|$ désigne le module de a et $\arg(a) = \theta\,[2\pi]$ son argument à $2k\pi$ près, k étant un nombre entier relatif.
Autrement dit, $\arg(a) = \theta + 2k\pi$.

Question 1 :

On en déduit que :

A - $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

B - $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$

C - $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$

D - $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Question 2 :

A - $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

B - $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$

C - $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$

D - $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Question 3 :

On démontre alors que :

A - $1 + e^{ix} = \left(\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) e^{i\frac{x}{2}}$

B - $1 + e^{ix} = -2i\left(\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) e^{i\frac{x}{2}}$

C - $1 + e^{ix} = 2\left(\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) e^{i\frac{x}{2}}$

D - $1 + e^{ix} = 2i\left(\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) e^{i\frac{x}{2}}$

Question 4 :

A - $1 - e^{ix} = \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) e^{i\frac{x}{2}}$

B - $1 - e^{ix} = -2i\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) e^{i\frac{x}{2}}$

C - $1 - e^{ix} = 2\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) e^{i\frac{x}{2}}$

D - $1 - e^{ix} = 2i\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) e^{i\frac{x}{2}}$

Question 5 :

On en déduit que :

A - $\left|1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ et $\arg\left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$

B - $\left|1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \sqrt{3}$ et $\arg\left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$

C - $\left|1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \sqrt{3}$ et $\arg\left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

D - $\left|1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ et $\arg\left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

Question 6 :

A - $\left|1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\arg\left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{8}\,[2\pi]$

B - $\left|1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\arg\left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{8}\,[2\pi]$

C - $\left|1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\arg\left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = -\frac{3\pi}{8}\,[2\pi]$

D - $\left|1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\arg\left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = -\frac{3\pi}{8}\,[2\pi]$

Question 7 :

A - $\left|2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right| = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\arg\left(2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) = -\frac{\pi}{8}\,[2\pi]$

B - $\left|2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\arg\left(2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{8}\,[2\pi]$

C - $\left|2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right| = 4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\arg\left(2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) = -\frac{\pi}{8}\,[2\pi]$

D - $\left|2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right| = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\arg\left(2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{8}\,[2\pi]$

PARTIE II

Question 8 :

L'équation $6x^2 - x - 1 = 0$ admet pour solutions les nombres :

A - $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{2}$

B - $\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{2}$

C - $-\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{2}$

D - $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$

Question 9 :

x est solution de l'inéquation $6x^2 - x - 1 > 0$ si et seulement si :

A - $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$

B - $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right[$

C - $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$

D - $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Question 10 :

On choisit au hasard un nombre réel x dans l'intervalle $[-1, 0]$.

A - La probabilité que ce nombre x soit solution de l'inéquation $6x^2 - x - 1 > 0$ est $\frac{1}{3}$.

B - La probabilité que ce nombre x soit solution de l'inéquation $6x^2 - x - 1 > 0$ est $\frac{2}{3}$.

C - La probabilité que ce nombre x soit solution de l'inéquation $6x^2 - x - 1 > 0$ est $\frac{1}{2}$.

D - Avec les données que nous avons, nous ne pouvons pas calculer la probabilité que ce nombre x soit solution de l'inéquation $6x^2 - x - 1 > 0$.

PARTIE III

A

On considère la suite entière $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$, et la suite entière $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\mathrm{v}_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$

Question 11 :

On démontre que :

A - $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie pour certaines valeurs de n.

B - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de terme positifs.

C - $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tous les nombres entiers n.

D - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie pour certaines valeurs de n.

Question 12 :

$(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite :

A - arithmétique de raison :$\dfrac{1}{5}$.

B - arithmétique de raison :$\dfrac{4}{5}$.

C - géométrique de raison :$\dfrac{4}{5}$.

D - géométrique de raison :$\dfrac{1}{5}$.

Question 13 :

Nous avons donc :

A - $\mathrm{v}_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

B - $\mathrm{v}_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

C - $\mathrm{v}_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

D - $\mathrm{v}_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

Question 14 :

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ car :

A - $u_n = \dfrac{\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 1}{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$

B - $u_n = \dfrac{-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 1}{1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$

C - $u_n = \dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + 1}{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$

D - $u_n = \dfrac{-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 1}{1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$

B

On considère la suite entière $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{-2n}{n+5}$.

Question 15 :

A - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

B - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

C - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$

D - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$

Question 16 :

On cherche les nombres entiers n qui vérifient $|u_n + 2| \leqslant 10^{-4}$. On trouve :

A - $n \leqslant 99\,995$

B - $n \geqslant 9\,995$

C - $n \leqslant 9\,995$

D - $n \geqslant 99\,995$

PARTIE IV

La température de refroidissement d'un objet initialement à la température de 220°C est une fonction du temps que l'on note $f(t)$, l'unité de temps étant l'heure.
Cette fonction vérifie l'équation différentielle : $f'(t) + \dfrac{1}{2}f(t) = 10$.
On donne de plus : $\ln(0,15) \approx -1,89$.

Question 17 :

A - La fonction f définie par $f(t) = 400e^{-\frac{t}{2}} + 20$ répond au modèle.

B - La fonction f définie par $f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20$ répond au modèle.

C - La fonction f définie par $f(t) = 100e^{-\frac{t}{2}} + 20$ répond au modèle.

D - La fonction f définie par $f(t) = 300e^{-\frac{t}{2}} + 20$ répond au modèle.

Question 18 :

Sur l'intervalle $[0, +\infty[$:

A - La fonction f qui répond au modèle décroît de 220 vers 20.

B - La fonction f qui répond au modèle croît de 0 vers 220.

C - La fonction f qui répond au modèle est strictement monotone.

D - La fonction f qui répond au modèle n'est pas strictement monotone.

Question 19 :

La température de l'objet est de 50°C au bout de :

A - 3 heures et 78 minutes, arrondi à la minute par excès.

B - 3,78 heures.

C - 3 heures et 47 minutes, arrondi à la minute par excès.

D - 3,47 heures.

PARTIE V

On considère l'intégrale I définie par : $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ ainsi que les fonction h et g définies sur l'intervalle $[-1, 0]$ par $h(x) = e^x - 1 - x$ et $g(x) = h(x) - \dfrac{1}{2}x^2$.

Question 20 :

Sur l'intervalle $[-1, 0]$:

A - La fonction h est croissante.

B - La fonction h est décroissante.

C - $h(x) \leqslant 0$.

D - $h(x) \geqslant 0$.

Question 21 :

On en déduit que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1, 0]$:

A - La fonction g est croissante.

B - La fonction g est décroissante.

C - $g(x) \leqslant 0$.

D - $g(x) \geqslant 0$.

Question 22 :

On en déduit que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1, 0]$:

A - $1 + x \leqslant e^x$

B - $1 + x + \dfrac{x^2}{2} \leqslant e^x$

C - $e^x \leqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

D - $e^x \leqslant 1 + x$

Question 23 :

On en déduit alors que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1]$:

A - $1 + x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2}$

B - $1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} \leqslant e^{-x^2} \leqslant 1 + x^2$

C - $1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2}$

D - $1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2} \leqslant e^{-x^2} \leqslant 1 - x^2$

Question 24 :

On en déduit aussi que :

A - $\dfrac{2}{3} \leqslant I \leqslant \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{5}$.

B - $\dfrac{2}{3} \leqslant I \leqslant \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{10}$.

C - $\dfrac{4}{3} \leqslant I \leqslant \dfrac{23}{15}$.

D - $\dfrac{23}{15} \leqslant I \leqslant \dfrac{5}{3}$.

Question 25 :

On en déduit une valeur approchée de I :

A - $I \approx \dfrac{23}{30}$ à + ou - 0,1 près.

B - $I \approx \dfrac{43}{60}$ à + ou - 0,05 près.

C - $I \approx \dfrac{43}{30}$ à + ou - 0,1 près.

D - $I \approx \dfrac{24}{15}$ à + ou - 0,05 près.