Épreuve initiale 2017
Mathématiques
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve initiale de Mathématiques du concours GSEA/TSEEAC 2017.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 2h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

Questions liées :
1 à 4
5 à 7
8 à 11
12 à 14
15 à 20
21 à 25

NOTATIONS

Les lettres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ désignent respectivement les ensembles des réels et des entiers naturels.

PARTIE I

Soit la fonction g définie par $g(x) = 1 - \dfrac{4e^x}{e^{2x}+1}$.

Question 1 :

L'ensemble de définition D_g de g est :

A - $D_g = [0; +\infty[$
B - $D_g =]0; +\infty[$
C - $D_g =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
D - $D_g = \mathbb{R}$

Question 2 :

La fonction dérivée de g est définie par :

A - $g'(x) = \dfrac{-4e^x\left(3e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$
B - $g'(x) = \dfrac{4e^x\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$
C - $g'(x) = \dfrac{-4e^x}{2e^{2x}}$
D - $g'(x) = \dfrac{4e^x}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$

Question 3 :

L'équation $g'(x) = 0$:

A - Admet pour solution $\alpha = \dfrac{1}{2}\ln(1)$
B - Admet pour solution $\alpha = -\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$
C - Admet pour solution $\alpha = 0$
D - N'admet pas de solution sur D_g

Question 4 :

On en déduit :

A - La fonction g est croissante sur D_g

B - La fonction g est décroissante sur D_g

C - La fonction g est croissante sur D_g pour $x \leqslant \alpha$, puis décroissante pour $x \geqslant \alpha$

D - La fonction g est décroissante sur D_g pour $x \leqslant \alpha$, puis croissante pour $x \geqslant \alpha$

Question 5 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

A - La fonction $x \mapsto e^x - x$ est négative sur $\mathbb{R}$

B - La fonction $x \mapsto e^x - x$ est positive sur $\mathbb{R}$

C - Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{x_0} - x_0 = 0$, la fonction $x \mapsto e^x - x$ est positive pour $x \leqslant x_0$, puis négative pour $x \geqslant x_0$

D - Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{x_0} - x_0 = 0$, la fonction $x \mapsto e^x - x$ est négative pour $x \leqslant x_0$, puis positive pour $x \geqslant x_0$

Question 6 :

On en déduit que l'ensemble de définition D_f de f est :

A - $D_f = \mathbb{R}$

B - $D_f =]-\infty; x_0[$

C - $D_f =]x_0; +\infty[$

D - $D_f =]-\infty; x_0[\cup]x_0; +\infty[$

Question 7 :

On a :

A - $f(x) - x = \dfrac{(1-x)\left(e^x - x - 1\right)}{e^x - x}$

B - $f(x) - x = \dfrac{(1+x)\left(e^x - x + 1\right)}{e^x - x}$

C - $f(x) - x = \dfrac{-xe^x + x}{e^x - x}$

D - $f(x) - x = \dfrac{xe^x - x - 1}{xe^x - x^2}$

PARTIE II

M.Lemonde achète son journal de l'après midi du lundi au vendredi entre 16 heures et 16 heures 30, au kiosque proche de chez lui. L'heure d'achat du journal suit une loi uniforme sur l'intervalle [16 ;16,5].

Question 8 :

La densité définissant la loi de probabilité pour l'heure d'achat du journal est :

A - $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$

B - $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$

C - $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 16 \\ 2 & \text{si } 16 \leqslant t \leqslant 16,5 \\ 0 & \text{si } t > 16,5 \end{cases}$

D - $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 16 \\ 2t - 32 & \text{si } 16 \leqslant t \leqslant 16,5 \\ 0 & \text{si } t > 16,5 \end{cases}$

Question 9 :

Nous sommes mardi à 13 heures ; la probabilité p_1 pour que M.Lemonde achète son journal aujourd'hui entre 16h20 et 16h30 vaut :

A - $p_1 = \dfrac{1}{3}$

B - $p_1 = \dfrac{1}{6}$

C - $p_1 = 0$

D - $p_1 = \dfrac{1}{2}$

Question 10 :

Nous sommes vendredi à 16h15, et le gérant du kiosque n'a toujours pas vu M.Lemonde. La probabilité p_2 pour que M.Lemonde achète son journal aujourd'hui entre 16h20 et 16h30 vaut :

A - $p_2 = \dfrac{1}{3}$

B - $p_2 = \dfrac{1}{6}$

C - $p_2 = 0$

D - $p_2 = \dfrac{1}{2}$

Question 11 :

Nous sommes mercredi à 15h30; l'heure à laquelle le gérant du kiosque peut «espérer» voir M.Lemonde est :

A - 16h

B - 16h10

C - 16h15

D - 16h30

PARTIE III

On se propose de déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = x^2$, où y désigne une fonction de la variable x.

Question 12 :

L'équation différentielle homogène (E_0) : $y'' + 4y = 0$ admet pour solution générale :

A - $y(x) = C\cos(2x)\,,\ C \in \mathbb{R}$

B - $y(x) = C\sin(2x)\,,\ C \in \mathbb{R}$

C - $y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\,,\ C_1 \in \mathbb{R}$ et $C_2 \in \mathbb{R}$

D - $y(x) = C\cos(2x + b)\,,\ C \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Question 13 :

Une solution particulière de l'équation (E) est $u(x)$, avec :

A - $u(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}$

B - $u(x) = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{4}$

C - $u(x) = \dfrac{1}{4}x$

D - $u(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{8}$

Question 14 :

En admettant que toute solution de (E) est de la forme $\varphi(x) = u(x) + y(x)$, avec $y(x)$ solution de (E_0), la solution φ_0 de (E) vérifiant $\varphi_0(0) = \dfrac{3}{4}$ et $\varphi_0'(0) = 1$ est :

A - $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{4}\cos(2x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x)$

B - $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{8} + \dfrac{7}{8}\cos(2x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x)$

C - $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}\cos(2x) + \dfrac{1}{2}\sin(2x)$

D - $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{8} + \dfrac{7}{8}\cos(2x) - \dfrac{1}{2}\sin(2x)$

PARTIE IV

Une retenue d'eau artificielle est alimentée par un ruisseau dont le débit diminue de 20% chaque jour à cause de la sécheresse. Pour la journée du 1$^{\text{er}}$ Juin, son débit D_0 est égal à 300 m^3. Pour n entier, on note D_n le débit pour le n-ième jour après le 1$^{\text{er}}$ Juin, en m^3.

Question 15 :

Le débit D_1 pour le 2 Juin vaut :

A - $D_1 = 360$ m^3
B - $D_1 = 60$ m^3
C - $D_1 = 240$ m^3
D - $D_1 = 280$ m^3

Question 16 :

La suite D_n vérifie la relation de récurrence :

A - $D_{n+1} = D_n - 20$
B - $D_{n+1} = D_n - 20D_n$
C - $D_{n+1} = D_n - 0,2D_n$
D - $D_{n+1} = 0,8D_n$

Question 17 :

On en déduit l'expression de D_n en fonction de n :

A - $D_n = 300 \times (0,8)^{n+1}$
B - $D_n = 300 - 20n$
C - $D_n = 300 \times (0,8)^n$
D - $D_n = 300 - 300 \times (0,2)^n$

Question 18 :

La limite D de la suite D_n est :

A - $D = 300$
B - $D = -\infty$
C - $D = 270$
D - $D = 0$

Question 19 :

Le volume d'eau V apporté dans la retenue au cours des 30 jours du mois de Juin vaut :

A - $V = 300 \times \dfrac{1-(0,8)^{30}}{0,8}$
B - $V = 300 \times 30 - \dfrac{30 \times 31}{2} \times 0,2$
C - $V = 300 \times \dfrac{1-(0,8)^{31}}{0,2}$
D - $V = 300 \times \dfrac{1-(0,8)^{30}}{0,2}$

Question 20 :

Sachant que $30 \times 31 = 930$ et $(0,8)^{30} \simeq 1,24 \times 10^{-3}$, une valeur approchée $\overline{V}$ de V est :

A - $\overline{V} = 1498,14$ m^3

B - $\overline{V} = 1498,5$ m^3

C - $\overline{V} = 374,535$ m^3

D - $\overline{V} = 8907$ m^3

PARTIE V

On considère la fonction f définie sur $[2\,;4]$ par $f(x) = \dfrac{2x-4}{(2x-3)^2}$

Question 21 :

La fonction f peut s'écrire :

A - $f(x) = \dfrac{2}{(2x-3)^2} + \dfrac{2}{2x-3}$

B - $f(x) = \dfrac{1}{2x-3} - \dfrac{1}{(2x-3)^2}$

C - $f(x) = \dfrac{2x-5}{(2x-3)^2} + \dfrac{1}{(2x-3)^2}$

D - $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-2}{(2x-3)^2}\right)$

Question 22 :

Une primitive F de f est alors définie par :

A - $F(x) = \dfrac{1}{2x-3} + \ln(2x-3) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

B - $F(x) = \ln\left(\sqrt{2x-3}\right) - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2x-3} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

C - $F(x) = -\dfrac{1}{2x-3} + 2\ln(2x-3) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

D - $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left((2x-3)^2\right) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

Question 23 :

L'intégrale $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ vaut alors :

A - $I = -\dfrac{4}{5} + \ln(5)$

B - $I = \ln\left(\sqrt{5}\right) - \dfrac{2}{5}$

C - $I = \dfrac{4}{5} + 2\ln(5)$

D - $I = \dfrac{1}{2}\ln(25)$

Question 24 :

Sachant que $\ln(5) \simeq 1,61$, une valeur approchée $\overline{I}$ de I est :

A - $\overline{I} = 4,02$

B - $\overline{I} = 0,81$

C - $\overline{I} = 0,405$

D - $\overline{I} = 1,61$

Question 25 :

Sur l'intervalle [2 ;4], la valeur moyenne V de la fonction f est :

A - $V = \ln\left(5^{\frac{1}{4}}\right) - \dfrac{1}{5}$

B - $V = \ln(5) + \dfrac{2}{5}$

C - $V = \ln\left(\sqrt{5}\right) - \dfrac{2}{5}$

D - $V = \ln(5)$