Épreuve de remplacement 2017
Mathématiques
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de remplacement de Mathématiques du concours GSEA/TSEEAC 2017.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 2h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

Questions liées :
6 à 8
9 à 15
22 à 25

PARTIE I

Dans cette partie, i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et $\mathbb{C}$ représente l'ensemble des nombres complexes.

Question 1 :

A - Une écriture exponentielle du nombre complexe $2i$ est : $2e^{i\frac{5\pi}{2}}$

B - Une écriture exponentielle du nombre complexe -5 est : $-5e^{-i\pi}$

C - Une écriture exponentielle du nombre complexe $2i$ est : $-2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

D - Une écriture exponentielle du nombre complexe -5 est : $-5e^{i\pi}$

Question 2 :

A - Une écriture exponentielle du nombre complexe 0 est : $0e^{i\theta}$, θ étant un nombre réel.

B - 0 n'admet pas d'écriture exponentielle.

C - Une écriture exponentielle du nombre complexe $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est : $e^{i\frac{\pi}{5}}$

D - Une écriture exponentielle du nombre complexe $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est : $e^{-i\frac{\pi}{5}}$

Question 3 :

Une écriture exponentielle du nombre complexe $2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2i\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ est :

A - $2e^{i\frac{9\pi}{14}}$

B - $2e^{i\frac{5\pi}{14}}$

C - $2e^{i\frac{6\pi}{7}}$

D - $2e^{i\frac{8\pi}{7}}$

Question 4 :

Une écriture exponentielle du nombre complexe $\dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{(1+i)^4}$ est :

A - $e^{-i\frac{\pi}{6}}$

B - $e^{i\frac{7\pi}{12}}$

C - $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

D - $\dfrac{1}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

Question 5 :

Une écriture exponentielle du nombre complexe $\dfrac{i(1+i)^3}{\left(\sqrt{3}-i\right)^5}$ est :

- **A -** $\dfrac{\sqrt{2}}{32}e^{i\frac{\pi}{12}}$
- **B -** $\dfrac{\sqrt{2}}{32}e^{i\frac{5\pi}{12}}$
- **C -** $\dfrac{\sqrt{2}}{16}e^{i\frac{\pi}{12}}$
- **D -** $\dfrac{\sqrt{2}}{16}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Question 6 :

On note $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 1-i\sqrt{3}$. La forme algébrique de $z_1 \times z_2$ est :

- **A -** $1-\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right)$
- **B -** $1+\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)$
- **C -** $1-\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)$
- **D -** $1+\sqrt{3}-i\left(1-\sqrt{3}\right)$

Question 7 :

Une écriture exponentielle de $z_1 \times z_2$ est :

- **A -** $2e^{i\frac{7\pi}{12}}$
- **B -** $2e^{-i\frac{\pi}{12}}$
- **C -** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$
- **D -** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

Question 8 :

On en déduit que :

- **A -** $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
- **B -** $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$
- **C -** $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
- **D -** $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

PARTIE II

Question 9 :

L'équation différentielle $(E) : y' - 2y = 0$ admet pour ensemble de solutions :

A - $S_{(E)} = \left\{ f : x \mapsto k \times e^{2x},\ k \in \mathbb{R} \right\}$

B - $S_{(E)} = \left\{ f : x \mapsto e^{2x} \right\}$

C - $S_{(E)} = \left\{ f : x \mapsto k \times e^{-2x},\ k \in \mathbb{R} \right\}$

D - $S_{(E)} = \left\{ f : x \mapsto k \times e^{\frac{1}{2}x},\ k \in \mathbb{R} \right\}$

Question 10 :

La solution f de (E) dont la courbe représentative C dans un repère donné passe par le point $A(1, -2)$ est :

A - $f(x) = 2e^{2x-2}$

B - $f(x) = -2e^{2x+2}$

C - $f(x) = 2e^{2x+2}$

D - $f(x) = -2e^{2-2x}$

Question 11 :

La solution f de (E) dont la courbe représentative C dans un repère donné passe par le point $A(1, -2)$:

A - Est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

B - Est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

C - Sa courbe représentative C admet l'axe des abscisses comme asymptote en $-\infty$.

D - Sa courbe représentative C admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.

Question 12 :

La solution g de l'équation différentielle $(E') : y' = 2y + 4$, dont la courbe représentative Γ possède une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$ en son point d'abscisse 1 est :

A - $S_{(E')} = \left\{ g : x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x-2} - 4 \right\}$

B - $S_{(E')} = \left\{ g : x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x+2} - 2 \right\}$

C - $S_{(E')} = \left\{ g : x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x+2} - 4 \right\}$

D - $S_{(E')} = \left\{ g : x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x-2} - 2 \right\}$

Question 13 :

Les deux nombres réels a et b tels que la fonction $\varphi : x \mapsto ax + b + \ln(x)$ soit une solution particulière de l'équation différentielle $(E'') : y' = 2y + 4x + 6 + \dfrac{1}{x} - 2\ln(x)$ sont :

A - $a = 2$ et $b = -4$

B - $a = 2$ et $b = -1$

C - $a = -2$ et $b = 4$

D - $a = -2$ et $b = -4$

Question 14 :

On admet qu'une fonction h est solution de (E'') si et seulement si la fonction $h - \varphi$ est solution de (E). On en déduit que l'ensemble des solutions de (E'') est :

A - $S_{(E'')} = \left\{h : x \mapsto -2x + 4 + \ln(x) + ke^{2x},\ k \in \mathbb{R}\right\}$

B - $S_{(E'')} = \left\{h : x \mapsto -2x - 4 + \ln(x) + ke^{-2x},\ k \in \mathbb{R}\right\}$

C - $S_{(E'')} = \left\{h : x \mapsto -2x - 4 + \ln(x) + ke^{2x},\ k \in \mathbb{R}\right\}$

D - $S_{(E'')} = \left\{h : x \mapsto -2x + 4 + \ln(x) + ke^{-2x},\ k \in \mathbb{R}\right\}$

Question 15 :

La solution ψ de l'équation différentielle (E'') dont la courbe représentative dans un repère donné passe par le point $A(1, -2)$ est :

A - $\psi : x \mapsto -2x - 4 + \ln(x) + 4e^{2x-2}$

B - $\psi : x \mapsto -2x + 4 + \ln(x) + 4e^{2x-2}$

C - $\psi : x \mapsto -2x - 4 + \ln(x) + 4e^{2x+2}$

D - $\psi : x \mapsto -2x + 4 + \ln(x) + 4e^{2x+2}$

PARTIE III

Question 16 :

Pour n nombre entier naturel, la suite définie par le terme général

$$u_n = 2n^2 - 13n + 1$$

A - est strictement croissante.

B - est strictement décroissante.

C - pour $n \geqslant 2$, est strictement croissante.

D - pour $n \geqslant 2$, est strictement décroissante.

Question 17 :

Pour n nombre entier naturel, la suite définie par le terme général

$$v_n = (2n + 1)e^n$$

A - est strictement croissante.

B - est strictement décroissante.

C - pour $n \geqslant 2$, est strictement croissante.

D - pour $n \geqslant 2$, est strictement décroissante.

Question 18 :

Pour n nombre entier naturel, la suite définie par le terme général

$$w_n = n - \ln(1 + n^2)$$

A - n'est pas strictement monotone.

B - n'est pas monotone.

C - est strictement croissante.

D - est strictement décroissante.

Question 19 :

Pour n nombre entier naturel non nul, la suite définie par le terme général

$$x_n = (-1)^n \ln(n)$$

A - n'est pas strictement monotone.

B - n'est pas monotone.

C - est strictement croissante.

D - est strictement décroissante.

Question 20 :

Pour n nombre entier naturel, la suite définie par le terme général

$$\begin{cases} y_0 &= 2 \\ y_{n+1} &= e^{y_n - 2} \end{cases}$$

A - n'est pas strictement monotone.

B - n'est pas monotone.

C - est strictement croissante.

D - est strictement décroissante.

Question 21 :

Soit la fonction $\{f : x \mapsto x + \sin(2\pi x)\}$ et n un nombre entier naturel :

A - la suite définie par le terme général : $u_n = f(n)$ est décroissante.

B - la suite définie par le terme général : $u_n = f(n)$ est croissante.

C - la fonction f est décroissante.

D - la fonction f est croissante.

PARTIE IV

Question 22 :

Soit f une fonction réelle à variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f(x) = ax + \dfrac{1}{5} & \text{si } x \in [0,4] \\ f(x) = 0 & \text{si } x \notin [0,4] \end{cases}$$

Pour que f définisse une loi à densité sur l'intervalle [0,4], il faut et il suffit que le nombre réel a soit égal à :

A - $\dfrac{1}{10}$

B - $\dfrac{1}{40}$

C - $\dfrac{4}{5}$

D - 1

Question 23 :

Nous notons X la variable aléatoire définie sur l'intervalle [0,4] dont la loi de probabilité a pour densité la fonction f précédente.

A - $P(X \leqslant 1) = \dfrac{19}{80}$

B - $P(X \leqslant 1) = \dfrac{1}{4}$

C - $P(X \leqslant 1) = \dfrac{3}{5}$

D - $P(X \leqslant 1) = \dfrac{7}{10}$

Question 24 :

A - $P(X \geqslant 2) = \dfrac{5}{32}$

B - $P(X \geqslant 2) = \dfrac{1}{5}$

C - $P(X \geqslant 2) = \dfrac{11}{20}$

D - $P(X \geqslant 2) = \dfrac{5}{26}$

Question 25 :

A - $P\left(\dfrac{1}{2} \leqslant X \leqslant 3\right) = \dfrac{41}{80}$

B - $P\left(\dfrac{1}{2} \leqslant X \leqslant 3\right) = \dfrac{43}{80}$

C - $P\left(\dfrac{1}{2} \leqslant X \leqslant 3\right) = \dfrac{38}{64}$

D - $P\left(\dfrac{1}{2} \leqslant X \leqslant 3\right) = \dfrac{39}{64}$