Épreuve 2018
Mathématiques
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques du concours GSEA/TSEEAC 2018.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 2h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

Questions liées :

3 et 4
5 et 6
8 à 12
13 à 15
16 à 20
21 à 25

PARTIE I

Dans cette partie, i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et $\mathbb{C}$ représente l'ensemble des nombres complexes et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\overline{z} = x - iy$.
Pour $z \in \mathbb{C}$ convenablement choisi, on note $z' = \dfrac{2\overline{z}}{\overline{z} + i}$.

Question 1 :

z' est un nombre réel si et seulement si :

A - z est imaginaire pur différent de i.

B - z est imaginaire pur.

C - z est réel différent de 1.

D - z est réel.

Question 2 :

On montre que :

A - Pour $z \neq -i$, $|z' - 2| = \dfrac{2}{|z + i|}$

B - Pour $z \neq i$, $|z' - 2| = \dfrac{2}{|\overline{z} + i|}$

C - Pour $z \neq i$, $|z' - 2| = \dfrac{2}{|z - i|}$

D - Pour $z \neq -i$, $|z' - 2| = \dfrac{2}{|\overline{z} - i|}$

Question 3 :

$\arg(z' - 2)$ existe pour tout :

A - $z \in \mathbb{C}$

B - $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$

C - $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, 2\}$

D - $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, 2, -i\}$

Question 4 :

Lorsque les arguments en question sont définis, on montre que :

A - $\arg(z'-2) = \frac{\pi}{2} - \arg(z-i) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

B - $\arg(z'-2) = \frac{\pi}{2} + \arg(z-i) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C - $\arg(z'-2) = -\frac{\pi}{2} + \arg(z+i) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

D - $\arg(z'-2) = -\frac{\pi}{2} + \arg(z-i) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Question 5 :

Une écriture exponentielle du nombre complexe $\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{1-i}$ est :

A - $2e^{-i\frac{\pi}{12}}$

B - $2e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

C - $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

D - $2e^{i\frac{\pi}{12}}$

Question 6 :

la forme algébrique de $\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2024}$ est :

A - $2^{2024}\left(1-i\sqrt{3}\right)$

B - $2^{2024}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$

C - $2^{2023}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$

D - $2^{2023}\left(1-i\sqrt{3}\right)$

Question 7 :

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1+i\sqrt{3}$, $z_B = -1-i$ et $z_C = -\left(2+\sqrt{3}\right)+i$. Le triangle ABC est :

A - Rectangle isocèle en A.

B - Isocèle en C.

C - Equilatéral.

D - Rectangle isocèle en B.

PARTIE II

Dans cette partie, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.
Dans le cadre des questions 8 à 12, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'expression : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(2^n u_n) = n$. On prendra comme approximation : $e \approx 2,718$.
Dans le cadre des questions 13 à 15, on considère le nombre réel suivant : $\mathrm{v} = 9,999...$ qui s'écrit dans le système décimal de position à l'aide d'un 9, d'une virgule et d'une infinité de 9 après la virgule.
On note, $\mathrm{v}_0 = 9$, $\mathrm{v}_1 = 0,9$, $\mathrm{v}_2 = 0,09$, $\mathrm{v}_3 = 0,009$ etc.

Question 8 :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un suite géométrique :

A - De raison e et premier terme 2.

B - De raison $2e$ et premier terme 1.

C - De raison $\dfrac{e}{2}$ et premier terme 2.

D - De raison e et premier terme 1.

Question 9 :

On en déduit que :

A - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

B - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

C - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{1-e}$

D - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Question 10 :

On note $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. On montre alors que :

A - $S_n = \dfrac{1}{2^n} \times \dfrac{2^{n+1} - e^{n+1}}{2-e}$

B - $S_n = \dfrac{1}{2^n} \times (2^n - e^n)$

C - $S_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^{n+1} - e^{n+1}}{2-e}$

D - $S_n = \dfrac{1}{2^n} \times \dfrac{2^n - e^n}{2-e}$

Question 11 :

On en déduit que :

A - $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$

B - $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{2}{1-e}$

C - $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{2}{e-1}$

D - $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Question 12 :

On montre que :

A - $u_n \geqslant 10^3 \Leftrightarrow n \leqslant \dfrac{3\ln(10)}{\ln(e)-\ln(2)}$

B - $u_n \geqslant 10^3 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{3\ln(10)}{\ln(e)-\ln(2)}$

C - $u_n \geqslant 10^3 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(3)+\ln(10)}{\ln(e)-\ln(2)}$

D - $u_n \geqslant 10^3 \Leftrightarrow n \leqslant \dfrac{\ln(3)+\ln(10)}{\ln(e)-\ln(2)}$

Question 13 :

La suite $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique :

A - De raison $\dfrac{1}{10}$ et de premier terme $\mathrm{v}_0 = 9$.

B - De raison $\dfrac{9}{10}$ et de premier terme $\mathrm{v}_0 = 9$.

C - De raison $0,1$ et de premier terme $\mathrm{v}_0 = 9$.

D - De raison $0,9$ et de premier terme $\mathrm{v}_0 = 9$.

Question 14 :

On en déduit alors que :

A - $\mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_1 + ... + \mathrm{v}_n = \dfrac{9}{10^n}$

B - $\mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_1 + ... + \mathrm{v}_n = 1 - \dfrac{1}{10^{n-1}}$

C - $\mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_1 + ... + \mathrm{v}_n = 9 - \dfrac{1}{10^{n+1}}$

D - $\mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_1 + ... + \mathrm{v}_n = 10 - \dfrac{1}{10^{n+1}}$

Question 15 :

Et ainsi :

A - $\mathrm{v} = 9$

B - $\mathrm{v} = 0$

C - $\mathrm{v} = 10$

D - $\mathrm{v} = 1$

PARTIE III

Question 16 :

On donne le polynôme $P(X) = 2X^3 + 11X^2 - 20X + 7$. On démontre que :

A - $P(X) = (X+1)(2X^2 + 13X - 7)$

B - $P(X) = (X+1)(2X^2 - 13X - 7)$

C - $P(X) = (X-1)(2X^2 - 13X - 7)$

D - $P(X) = (X-1)(2X^2 + 13X - 7)$

Question 17 :

L'égalité est vraie :

A - $13^2 = 10^2 + 3^2$

B - $13^2 = 10^2 + 60 + 3^2$

C - $15^2 = 225$

D - $15^2 = 125$

Question 18 :

Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels, l'ensemble S_1 des solutions de l'équation (E_1) : $2x^3 + 11x^2 - 20x + 7 = 0$ est :

A - $S_1 = \left\{\frac{1}{2}, -1, -7\right\}$

B - $S_1 = \left\{\frac{1}{2}, 1, -7\right\}$

C - $S_1 = \left\{\frac{1}{2}, 1, 7\right\}$

D - $S_1 = \left\{-\frac{1}{2}, 1, 7\right\}$

Question 19 :

Dans $\mathbb{R}^{+*}$, l'ensemble des nombres réels strictement positifs, l'ensemble S_2 des solutions de l'équation (E_2) : $2\left(\ln(x)\right)^3 + 11\left(\ln(x)\right)^2 - 20\ln(x) + 7 = 0$ est :

A - $S_2 = \left\{e, e^{-7}, \sqrt{e}\right\}$

B - $S_2 = \left\{e^{-1}, e^{-7}, \sqrt{e}\right\}$

C - $S_2 = \left\{e, e^{7}, \sqrt{e}\right\}$

D - $S_2 = \left\{e, e^{7}, e^{-\frac{1}{2}}\right\}$

Question 20 :

Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels, l'ensemble S_3 des solutions de l'équation (E_3) : $2e^{3x} + 11e^{2x} - 20e^{x} + 7 = 0$ est :

A - $S_3 = \left\{0, -\ln(2), e^{-7}\right\}$

B - $S_3 = \{-\ln(2)\}$

C - $S_3 = \{0, -\ln(2)\}$

D - $S_3 = \{0, -\ln(2), -\ln(7)\}$

PARTIE IV

On donne les équations différentielles (F), (G) et (G_0) suivantes :
$(F) : y'' + 4y = 0$, $(G) : y' + y = 2e^{-x}$ et $(G_0) : y' + y = 0$ où :
y, y' et y'' désignent respectivement une fonction, sa dérivée première et sa dérivée seconde.
On admet que l'ensemble des solutions de l'équation (G) est l'ensemble des fonctions h qui s'écrivent sous la forme $h = g + g_0$, où g désigne une solution particulière de l'équation (G), et g_0 la forme générale des solutions de l'équation (G_0).

Question 21 :

La fonction f solution de l'équation différentielle (F) satisfaisant aux conditions initiales $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 2$ est définie par l'expression :

A - $f(x) = \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x)$

B - $f(x) = \sqrt{3}\cos(4x) + \sin(4x)$

C - $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \dfrac{1}{2}\sin(2x)$

D - $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(4x) + \dfrac{1}{2}\sin(4x)$

Question 22 :

Pour tout nombre réel x, nous avons :

A - $f(x) = \sin\left(4x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

B - $f(x) = 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

C - $f(x) = \sin\left(4x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

D - $f(x) = 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

Question 23 :

Pour $x \in [0, 2\pi[$, l'équation $f(x) = 0$ admet pour ensemble de solutions :

A - $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

B - $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

C - $S = \left\{\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

D - $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

Question 24 :

A - La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^{-x}$ est solution de l'équation (G).

B - La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2xe^{-x}$ est solution de l'équation (G).

C - La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{-x}$ est solution de l'équation (G).

D - La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2xe^{-x}$ est solution de l'équation (G).

Question 25 :

La solution h de l'équation (G) qui vérifie la condition initiale $h(0) = -1$ s'écrit :

A - $h(x) = (2x + 1)e^{-x}$

B - $h(x) = 2xe^{-x} + e^{x}$

C - $h(x) = (2x - 1)e^{-x}$

D - $h(x) = 2xe^{-x} - e^{x}$