Énoncé

Épreuve 2019
Mathématiques
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques du concours GSEA/TSEEAC 2019.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 2h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

Questions liées :
1 à 5
6 à 12
13 à 20
21 à 25

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ désignent respectivement les ensembles des réels et des entiers naturels. On rappelle que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, où i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et x est un nombre réel.

PARTIE I

Max doit se rendre en voiture dans une ville voisine pour un rendez vous à 15h15. Il quitte son domicile entre 13h et 14h à un instant $13 + t$, où t est un nombre quelconque pris au hasard dans $[0; 1]$.
Plus il part tard, plus il y a de circulation, la durée de son trajet étant estimée à $t + 0,5$.

Question 1 :

La probabilité p_1 que Max ne soit pas en retard à son rendez-vous est :

A - $p_1 = 0,125$
B - $p_1 = 0,25$
C - $p_1 = 0,75$
D - $p_1 = 0,875$

Question 2 :

La probabilité p_2 que Max arrive avec exactement un quart d'heure d'avance est :

A - $p_2 = 0,125$
B - $p_2 = 0,25$
C - $p_2 = 0,75$
D - $p_2 = 0,875$

Question 3 :

La probabilité p_3 que Max soit en retard de plus de 9 minutes à son rendez-vous est :

A - $p_3 = 0,05$
B - $p_3 = 0,13$
C - $p_3 = 0,87$
D - $p_3 = 0,95$

Question 4 :

La probabilité p_4 que Max arrive entre 14h56 et 15h06 est :

A - $p_4 = 0,1$
B - $p_4 = 0,26$
C - $p_4 = 0,52$
D - $p_4 = 0,78$

Question 5 :

Pour arriver entre 14h54 et 15h15, Max doit partir :

A - Entre 13h32 et 13h48

B - Entre 13h42 et 13h52

C - Entre 13h53 et 14h21

D - Entre 14h02 et 14h18

PARTIE II

On administre à un patient un médicament par intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps. On souhaite étudier, pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

Question 6 :

On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20% du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

A - une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 2

B - une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison -2

C - une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 0,2

D - une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 0,8

Question 7 :

On en déduit :

A - $u_n = 10 - 2n$

B - $u_n = 10 + 2n$

C - $u_n = 8(0,8)^{n-1}$

D - $u_n = 10(0,2)^n$

Question 8 :

On donne $(1,25)^{20} \simeq 86{,}74$. La quantité de médicament restant dans le sang devient inférieure à 1% de la quantité initiale au bout de :

A - 5 min

B - 19 min

C - 20 min

D - 21 min

Question 9 :

La machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament, et on estime toujours que 20% du médicament est éliminé par minute. Toutes les minutes, la machine réinjecte 1 mL de médicament. Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes. La suite $(\mathrm{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation :

A - $\mathrm{w}_{n+1} = 0,2\mathrm{w}_n + 1$

B - $\mathrm{w}_{n+1} = 0,2(\mathrm{w}_n + 1)$

C - $\mathrm{w}_{n+1} = 0,8\mathrm{w}_n + 1$

D - $\mathrm{w}_{n+1} = 0,8(\mathrm{w}_n + 1)$

Question 10 :

On pose $z_n = \mathrm{w}_n - 5$. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

A - une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $z_0 = 5$

B - une suite géométrique de raison 0,2 et de premier terme $z_0 = 5$

C - une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $z_0 = 5$

D - une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $z_0 = 5$

Question 11 :

Ainsi, on en déduit l'expression de w_n en fonction de n :

A - $\mathrm{w}_n = 5(1 - 0,8)^n + 5$

B - $\mathrm{w}_n = 5(1 - 0,2)^n + 5$

C - $\mathrm{w}_n = 2(5 + n)$

D - $\mathrm{w}_n = 2(5 - n)$

Question 12 :

Par passage à la limite, on obtient :

A - $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{w}_n = -\infty$

B - $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{w}_n = 0$

C - $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{w}_n = 5$

D - $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{w}_n = +\infty$

PARTIE III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 + \cos(x))e^{1-x}$.

Question 13 :

La fonction f vérifie :

A - Il existe un réel α tel que $f(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant \alpha$ et $f(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant \alpha$

B - Il existe un réel α tel que $f(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant \alpha$ et $f(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant \alpha$

C - Pour tout réel x, $f(x) < 0$

D - Pour tout réel x, $f(x) > 0$

Question 14 :

La fonction dérivée f' de f est :

A - $f'(x) = (\sin(x))e^{1-x}$
B - $f'(x) = (2 + \cos(x) + \sin(x))e^{1-x}$
C - $f'(x) = -(2 + \cos(x) + \sin(x))e^{1-x}$
D - $f'(x) = -(2 + \cos(x) - \sin(x))e^{1-x}$

Question 15 :

On montre que pour tout x :

A - $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) - \sin(x)$
B - $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) + \sin(x)$
C - $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) + \sin(x)$
D - $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) - \sin(x)$

Question 16 :

La fonction f' vérifie :

A - Pour tout réel x , $f'(x) < 0$
B - Pour tout réel x , $f'(x) > 0$
C - Il existe un réel β tel que $f'(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant \beta$ et $f'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant \beta$
D - Il existe un réel β tel que $f'(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant \beta$ et $f'(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant \beta$

Question 17 :

On montre :

A - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
B - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
C - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
D - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Question 18 :

Soit A l'aire de la partie du plan délimité par la courbe C représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On a, en unité d'aire :

A - $A = 2e - 2 - \int_0^1 (\cos(t))e^{1-t}\,dt$
B - $A = 2e - 2 + \int_0^1 (\cos(t))e^{1-t}\,dt$
C - $A = 2e - 2 + \sin(1)$
D - $A = 2e - 2 - \sin(1)$

Question 19 :

Soit $f_1(t) = \cos(t)e^{1-t}$ et $f_2(t) = \sin(t)e^{1-t}$, pour t réel. On peut montrer que :

A - $f_1(t) = \dfrac{1}{2}\Big[f_2'(t) - f_1'(t)\Big]$

B - $f_1(t) = \dfrac{1}{2}\Big[f_1'(t) - f_2'(t)\Big]$

C - $f_2(t) = \dfrac{1}{2}\Big[f_2'(t) + f_1'(t)\Big]$

D - $f_2(t) = -\dfrac{1}{2}\Big[f_1'(t) + f_2'(t)\Big]$

Question 20 :

On en déduit que :

A - $A = \dfrac{3}{2}e - \dfrac{3}{2}$

B - $A = \dfrac{3}{2}e - 2 + \dfrac{\sin(1) - \cos(1)}{2}$

C - $A = \dfrac{5}{2}e - \dfrac{5}{2}$

D - $A = \dfrac{5}{2}e - 2 + \dfrac{\cos(1) - \sin(1)}{2}$

PARTIE IV

Soit les nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

Question 21 :

Les nombres z_1 et z_2 s'écrivent sous forme exponentielle :

A - $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

B - $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

C - $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

D - $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Question 22 :

Le nombre complexe $\dfrac{z_1}{z_2}$ s'écrit sous forme exponentielle :

A - $\dfrac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{5\pi}{12}}$

B - $\dfrac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{12}}$

C - $\dfrac{z_1}{z_2} = e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

D - $\dfrac{z_1}{z_2} = e^{-i\frac{\pi}{12}}$

Question 23 :

Le nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$ s'écrit sous forme algébrique :

A - $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} - i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

B - $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

C - $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

D - $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} - i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Question 24 :

On en déduit :

A - $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

B - $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

C - $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

D - $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Question 25 :

On en déduit :

A - $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

B - $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

C - $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

D - $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$