Épreuve 2013

Mathématiques & Physique

(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2013.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 3h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

PARTIE MATHEMATIQUES

Questions liées :
1 et 2
3 à 5
6 à 13
14 et 15

PARTIE I

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, u, \mathrm{v}, \mathrm{w})$. On note la droite (D) passant par les points A(1,-2,-1) et B(3,-5,-2) et (D') la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-k \\ y & = & 1+2k \\ z & = & k \end{array}\right. \quad \text{avec } k \text{ réel}$$

On considère le plan (P) d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.

Question 1 :

On montre que :

A - La droite (D) a pour représentation paramétrique $x = 1 + 2t$; $y = -2 + 3t; z = -1 + t$ avec t réel.

B - La droite (D) est dirigée par le vecteur de coordonnées (-1,2,1).

C - Les droites (D) et (D') sont parallèles car elles ne sont pas sécantes.

D - Les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires car elles ne sont pas parallèles et n'ont aucun point commun puisque le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1+2t & = & 2-k \\ -2-3t & = & 1+2k \\ -1-t & = & k \end{array}\right.$$

n'a pas de solution.

Question 2 :

On montre que :

A - Le plan (P) contient la droite (D).

B - Le plan (P) contient la droite (D').

C - Le plan (P) et la droite (D') se coupent en un seul point dont les coordonnées sont $(6, -7, -4)$.

D - Le plan (P) et la droite (D) se coupent en un seul point dont les coordonnées sont $(-7, 10, 3)$.

PARTIE II

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct (O, u, v), on considère les points A et B d'affixes respectives $z_a = 1 - i$ et $z_b = 2 + \sqrt{3} + i$.

Question 3 :

Le complexe z_a a :

A - Pour module $|z_a| = 2$.

B - Pour module $|z_a| = \sqrt{1 + (i)^2} = 0$.

C - Pour argument $\arg(z_a) = \dfrac{\pi}{4}$.

D - Pour argument $\arg(z_a) = \dfrac{7\pi}{4}$.

Question 4 :

La forme algébrique du complexe $\dfrac{z_b}{z_a}$ s'écrit :

A - $\dfrac{z_b}{z_a} = \dfrac{\left(1 - \sqrt{3} + i\left(3 - \sqrt{3}\right)\right)}{2}$

B - $\dfrac{z_b}{z_a} = -\dfrac{\left(1 - \sqrt{3} + i\left(3 - \sqrt{3}\right)\right)}{2}$

C - $\dfrac{z_b}{z_a} = \dfrac{\left(1 + \sqrt{3} - i\left(3 + \sqrt{3}\right)\right)}{2}$

D - $\dfrac{z_b}{z_a} = \dfrac{\left(1 + \sqrt{3} + i\left(3 + \sqrt{3}\right)\right)}{\sqrt{2}}$

Question 5 :

On en déduit que le complexe z_b a :

A - Pour module $|z_b| = 1 + \sqrt{3}$.

B - Pour module $|z_b| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

C - Pour argument $\arg(z_b) = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{12}$.

D - Pour argument $\arg(z_b) = \dfrac{7\pi}{12}$.

PARTIE III

Soit n un entier naturel. On note f_n la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}$$

e désigne la fonction exponentielle et ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

Question 6 :

La fonction f_0

A - a pour dérivée $f_0'(x) = -\dfrac{1}{e^{-x}}$ pour tout x réel.

B - a pour dérivée $f_0'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ pour tout x réel.

C - est décroissante sur $\mathbb{R}$.

D - est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Question 7 :

On établit que :

A - La fonction f_0 a pour limite 0 lorsque x tend vers $-\infty$ et 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

B - La fonction f_0 a pour limite 1 lorsque x tend vers $-\infty$ et 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

C - La courbe C_0 admet pour asymptotes les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

D - La courbe C_0 admet pour asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Question 8 :

On montre que :

A - $f_0(x) = -f_1(-x)$ pour tout x réel.

B - $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout x réel.

C - La fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $f_1'(x) = f_0'(-x) > 0$ pour tout x réel.

D - La fonction f_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car $f_1'(x) = -f_0'(x) < 0$ pour tout x réel.

Question 9 :

On établit que :

A - Les courbes C_0 et C_1 sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées car $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout x réel.

B - Les courbes C_0 et C_1 sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées car $f_0(x) = -f_1(-x)$ pour tout x réel.

C - Les courbes C_0 et C_1 sont des droites parallèles.

D - Les courbes C_0 et C_1 ont un point commun de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

Question 10 :

Pour tout n entier supérieur ou égal à 2, la fonction f_n :

A - N'admet pas de limite en $-\infty$.

B - A pour limite 1 lorsque x tend vers $-\infty$.

C - A pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et 0 lorsque x tend vers $-\infty$.

D - A pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Question 11 :

Pour tout n entier supérieur ou égal à 2, la fonction f_n :

A - A pour dérivée $f_n'(x) = \dfrac{ne^{-nx}}{e^{-x}}$ pour tout x réel.

B - A pour dérivée $f_n'(x) = -\dfrac{\left(ne^{-nx} + (n-1)e^{(n-1)x}\right)}{\left(e^{nx} + e^{(n-1)x}\right)^2}$ pour tout x réel.

C - Est décroissante et minorée par 0 sur $\mathbb{R}$.

D - Est croissante et minorée par 0 sur $\mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel n, u_n représente l'aire, en unité d'aire, du domaine plan délimité par la courbe C_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Question 12 :

La suite (u_n) vérifie :

A - $u_1 = -\dfrac{e^{-1}}{1+e^{-1}} + \dfrac{1}{2}$ et $u_0 = 1 - u_1$.

B - $u_1 = \ln(2) - \ln\left(1 + e^{-1}\right)$ et $u_0 = 1 - \ln(2) + \ln\left(1 + e^{-1}\right)$.

C - $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout n entier naturel.

D - $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,\mathrm{d}x$ pour tout n entier naturel.

Question 13 :

La suite (u_n) :

A - N'est pas convergente car elle est croissante non majorée.

B - Est convergente car elle est croissante et majorée.

C - Est convergente car elle est décroissante et minorée.

D - a pour limite 0 car, pour tout n entier naturel non nul,
$0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n}$ terme général d'une suite qui converge vers 0.

PARTIE IV

La durée de vie d'un téléphone portable (c'est à dire la durée de fonctionnement avant la première panne), mesurée en années, est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.
Pour tout réel t positif, on note $\mathrm{p}(X \leqslant t)$ la probabilité qu'un téléphone portable ait une durée de vie inférieure à t années.
e désigne la fonction exponentielle et ln la fonction logarithme népérien.

Question 14 :

On suppose, dans cette question, que la probabilité qu'un téléphone portable ait une durée de vie strictement supérieure à 2 années est égale à e^{-2}, on a :

A - $\mathrm{p}\left(X \leqslant t\right) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-\lambda t}$ pour tout t réel positif.

B - $\mathrm{p}\left(X \leqslant t\right) = \displaystyle\int_0^t e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}$ pour tout t réel positif.

C - $\lambda = \dfrac{\ln\left(e^2\right)}{2} = 1$

D - $\lambda = \dfrac{\ln\left(\dfrac{e^2}{e^2 - 1}\right)}{2}$

Question 15 :

Reprenant la valeur du paramètre λ de la question précédente, on note
$\mathrm{p}_{X>1}(X > 4)$ la probabilité qu'un téléphone portable ait une durée de vie supérieure à 4 années, sachant qu'il n'a pas eu de panne au cours de la première année. On a :

A - L'espérance de X vaut E(X)= $\lambda = 1$.

B - L'espérance de X vaut E(X)= $\displaystyle\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} = 1$

C - $\mathrm{p}_{X>1}(X > 4) = \mathrm{p}(X > 4) = 1 - \mathrm{p}(X \leqslant 4) = e^{-4}$

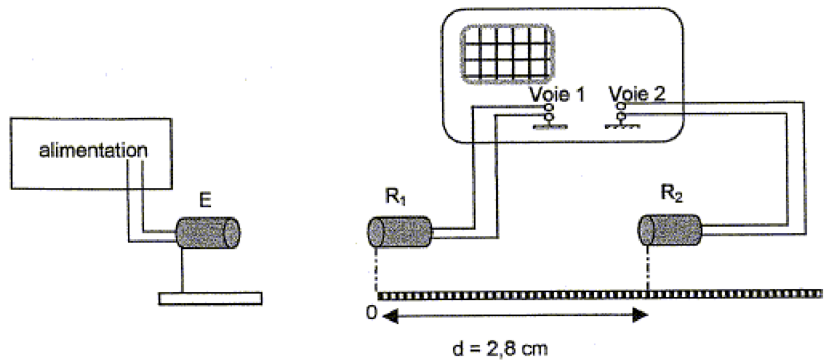
D - $\mathrm{p}_{X>1}(X > 4) = \dfrac{\mathrm{p}(X > 4)}{\mathrm{p}(X > 1)} = \dfrac{1 - \mathrm{p}(X \leqslant 4)}{1 - \mathrm{p}(X \leqslant 1)} = \dfrac{e^{-4}}{e^{-1}} = e^{-3}$

PARTIE PHYSIQUE

Questions liées :
16 à 21
22 à 25
26 à 30

Question 16 :

Au cours d'une séance de travaux pratiques, un élève dispose du matériel suivant :
— un émetteur d'ultrasons E et son alimentation électrique ;
— deux récepteurs d'ultrasons R_1 et R_2 ;
— un oscilloscope ;
— une règle graduée.
Il réalise le montage suivant :



L'émetteur E génère une onde ultrasonore progressive sinusoïdale qui se propage dans l'air jusqu'aux récepteurs R_1 et R_2. L'émetteur est les deux récepteurs sont alignés comme représenté ci-dessus.
Le récepteur R_1 est placé au 0 de la règle graduée. Il est distant de R_2 de d.
Les signaux captés par les récepteurs R_1 et R_2 sont appliqués respectivement sur les voies 1 et 2 d'un oscilloscope pour être visualisés sur l'écran de celui-ci.

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes :

A - L'oscilloscope permet de mesurer directement les intensités électriques traversant R_1 et R_2.

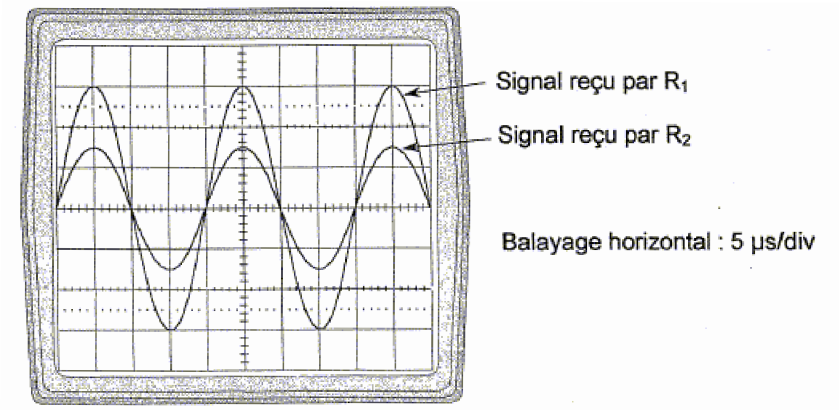
B - L'oscilloscope permet de mesurer directement les tensions électriques aux bornes de R_1 et R_2.

C - Une des bornes de la voie 1 est reliée à une des bornes de la voie 2.

D - Cette expérience doit être réalisée en absence de lumière extérieure.

Question 17 :

Lorsque le récepteur R_2 est situé à $d = 2,8$ cm du récepteur R_1, les signaux reçus par les deux récepteurs sont en phase. On observe l'oscillogramme ci-dessous sur l'écran :



La valeur de la fréquence f de l'onde ultrasonore est comprise entre :

A - 10 μHz et 30 μHz ;

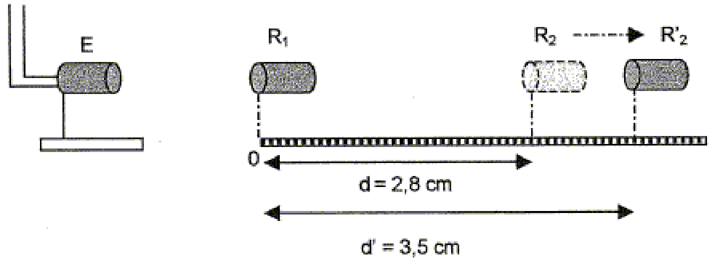
B - 40 Hz et 60 Hz ;

C - 40 kHz et 60 kHz ;

D - 100 kHz et 300 kHz.

Question 18 :

On éloigne lentement R_2 le long de la règle ; on constate que le signal reçu par R_2 se décale sur la droite jusqu'à une position R_2' pour laquelle on retrouve les signaux reçus par les deux récepteurs en phase. On relève la distance d' séparant désormais R_1 de R_2'. On lit : $d' = 3,5$ cm



La longueur d'onde λ de l'onde ultra sonore est comprise entre :

A - 5 μs et 15 μs ;

B - 15 μs et 25 μs ;

C - 0,6 cm et 0,8 cm ;

D - 3,4 cm et 3,6 cm.

Question 19 :

La relation entre f, λ et la célérité v des ultrasons dans l'air est :

A - $f = \lambda$v ;

B - v$= \lambda f$;

C - v$= \dfrac{\lambda}{f}$;

D - $\lambda =$vf.

Question 20 :

La valeur de v est comprise entre :

A - 10 $m.s^{-1}$ et 100 $m.s^{-1}$;
B - 100 $m.s^{-1}$ et 10^3 $m.s^{-1}$;
C - 10^3 $m.s^{-1}$ et 10^4 $m.s^{-1}$;
D - 10^4 $m.s^{-1}$ et 10^5 $m.s^{-1}$.

Question 21 :

On immerge, en veillant à leur étanchéité, l'émetteur et les deux récepteurs R_1 et R_2 dans l'eau contenue dans une cuve de dimensions suffisantes. Sans changer la fréquence f de l'émetteur, on constate que pour observer deux signaux successifs captés par R_1 et R_2 en phase, il faut éloigner R_2 de R_1 sur une distance 4 fois plus grande que dans l'air.

La valeur de la célérité de l'onde ultrasonore dans l'eau est comprise entre :

A - 10 $m.s^{-1}$ et 100 $m.s^{-1}$;
B - 100 $m.s^{-1}$ et 10^3 $m.s^{-1}$;
C - 10^3 $m.s^{-1}$ et 10^4 $m.s^{-1}$;
D - 10^4 $m.s^{-1}$ et 10^5 $m.s^{-1}$.

Question 22 :

Une utilisation des ultrasons est le nettoyage par cavitation acoustique. Il est mis en oeuvre dans de très nombreux secteurs d'activités : industrie mécanique, horlogerie, bijouterie, optique,... La cavitation est produite en émettant des ultrasons de forte puissance dans un liquide.
L'émetteur est un disque constitué d'un matériau piézoélectrique sur les faces duquel sont déposées deux électrodes métallisées. Lorsqu'une tension électrique sinusoïdale est appliqué entre ces deux électrodes, le disque se dilate et se contracte périodiquement. Ces déplacements périodiques du disque provoquent des successions de dépressions-surpressions du liquide en contact avec le disque. Cette perturbation se propage ensuite de proche en proche dans l'ensemble du fluide : c'est l'onde ultrasonore.

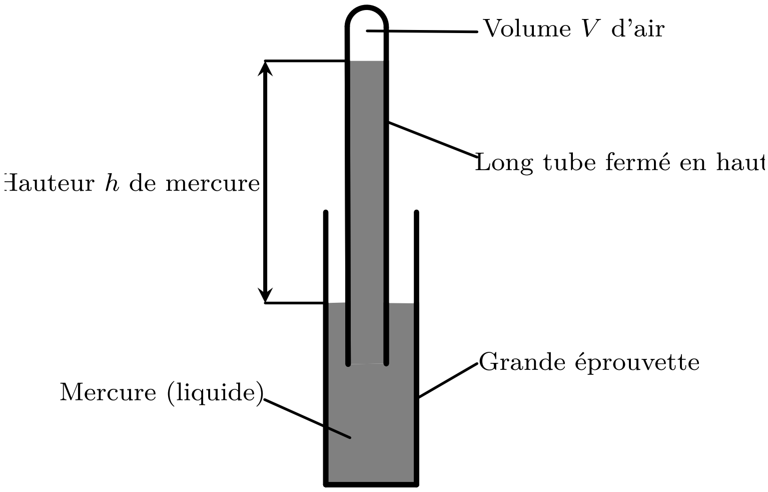
Lors du passage de l'onde dans une «tranche» de liquide, le phénomène de cavitation se produit si la puissance de l'onde est suffisante : des micro-bulles dont le diamètre peut atteindre 100 μm apparaissent. Les micro-bulles sont transitoires. Elles implosent en moins d'une microseconde. Les ondes de choc émises par l'implosion nettoient la surface d'un solide plongé dans le liquide.

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

A - Une onde ultrasonore est une onde électromagnétique.
B - Une onde ultrasonore est une onde mécanique.
C - Cette onde ultrasonore est transversale.
D - Cette onde ultrasonore est longitudinale.

Question 23 :

Pour essayer de comprendre le phénomène de cavitation avec les connaissances d'un élève de niveau bac S, on réalise la manipulation suivante :



Dans cette manipulation, on peut déplacer le long tube plongé dans le mercure vers le haut ou vers le bas. On peut alors mesurer la hauteur h de la colonne de mercure et le volume V de l'air emprisonné au dessus.

On constate que $\dfrac{1}{V}$ varie linéairement avec la hauteur h, ce qui veut dire que :

A - Si h est multiplié par 2, V est divisé par 2 ;

B - h ne peut pas être nulle car sinon V serait infini ;

C - V ne peut pas être nul car sinon h serait infinie ;

D - h ne peut pas être négative car sinon V serait négatif.

Question 24 :

Plus précisément , on observe que quand la hauteur h est positive et augmente, le volume V augmente également. On s'intéresse maintenant à la pression P de l'air emprisonné dans le tube.

Parmi les propositions suivantes, quelles sont celles qui sont exactes ?

A - Quand V augmente, P augmente.

B - Quand V augmente, P diminue.

C - Quand h augmente, P augmente.

D - Quand h augmente, P diminue.

Question 25 :

Dans la manipulation précédente, on remplace l'air par de l'eau. On observe que pour une hauteur h positive mais faible, cette eau se présente sous la forme d'une goutte de liquide occupant un faible volume. Mais si on déplace le long tube vers le haut, on observe que h augmente, et qu'un gaz finit par apparaître au dessus du liquide, ce dernier pouvant même disparaître totalement.

Le gaz qui apparaît peut être identifié comme :

A - de la vapeur d'eau ;

B - de l'air initialement dissout dans l'eau liquide car la vapeur d'eau n'existe pas en dessous de 100°C.

Dans toutes ces expériences, on peut interpréter l'apparition de micro bulles dans le phénomène de cavitation de la manière suivante :

C - une forte pression provoque au sein du liquide l'apparition de gaz sous forme de bulles ;

D - une faible pression provoque au sein du liquide l'apparition de gaz sous forme de bulles

---

Question 26 :

Dans un repère géocentrique supposé galiléen, on considère un satellite de centre S dont la trajectoire est une orbite circulaire située dans le plan équatorial à l'altitude h autour de la Terre. On considère que la Terre est sphérique et homogène de masse M_T, de centre O, de rayon $R_T \simeq 6 \times 10^3$ km.
On admet que toute action mécanique autre que l'interaction gravitationnelle entre le satellite et la Terre est négligeable.
On note G la constante de gravitation et G_0 la valeur du champ de gravitation à la surface de la Terre.

Le module G_h du vecteur champ de gravitation à l'altitude h est :

A - $G_h = G_0 \dfrac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$

B - $G_h = G_0 \dfrac{R_T}{R_T + h}$

C - $G_h = G \dfrac{M_T}{(R_T + h)^2}$

D - $G_h = G \dfrac{M_T}{R_T + h}$

Question 27 :

La vitesse v du satellite dans le référentiel géocentrique est :

A - v= $\sqrt{\dfrac{mGR_T^2}{R_T + h}}$

B - v= $\sqrt{\dfrac{mG_0R_T^2}{R_T + h}}$

C - v= $\sqrt{\dfrac{GR_T^2}{R_T + h}}$

D - v= $\sqrt{\dfrac{G_0R_T^2}{R_T + h}}$

Question 28 :

Dans le même repère, la période T du satellite est :

A - $T = \dfrac{2\pi\left(R_T + h\right)}{\mathrm{v}}$

B - $T = \dfrac{R_T + h}{\mathrm{v}}$

Sa vitesse angulaire ω est :

C - $\omega = \sqrt{\dfrac{GM_T}{\left(R_T + h\right)^3}}$

D - $\omega = \sqrt{\dfrac{G_0 M_T}{\left(R_T + h\right)^3}}$

Question 29 :

La période T_0 de rotation de la Terre sur elle même est comprise entre :

A - 6×10^4 s et 8×10^4 s ;

B - 8×10^4 s et 10^5 s ;

C - 10^5 s et 2×10^5 s ;

D - 2×10^5 s et 3×10^5 s.

Question 30 :

Le satellite considéré est en orbite basse à l'altitude $h \simeq 8 \times 10^2$ km, à la vitesse $\mathrm{v} \simeq 7 \times 10^3$ m.s^{-1}.

Les mouvements de rotation de la Terre et du satellite se font dans le même sens. La durée T' qui sépare deux passages successifs du satellite à la verticale d'un point donné de l'équateur est :

A - $T' = T - T_0$;

B - $T' = T_0 - T$;

C - $T' = \dfrac{T_0 T}{T - T_0}$;

D - $T' = \dfrac{T_0 T}{T_0 - T}$.