Épreuve 2015

Mathématiques & Physique

(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2015.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 3h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

PARTIE MATHEMATIQUES

Questions liées :
1 à 3
4 à 9
10 à 12
13 à 15

PARTIE I

On considère le nombre complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Question 1 :

A - Une forme exponentielle de z est $z = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

B - Une forme exponentielle de z est $z = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

C - Une forme exponentielle de z est $z = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}}$.

D - Une forme exponentielle de z est $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Question 2 :

A - La forme algébrique de z^{-1} est $z^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

B - La forme algébrique de z^{-1} est $z^{-1} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

C - La forme algébrique de z^{-1} est $z^{-1} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

D - La forme algébrique de z^{-1} est $z^{-1} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

Question 3 :

A - La forme algébrique de z^2 est $z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$.

B - La forme algébrique de z^2 est $z^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$.

C - La forme algébrique de z^3 est $z^3 = -8$.

D - La forme algébrique de z^3 est $z^3 = 8$.

PARTIE II

Pour tout nombre entier naturel n, on définit le terme général de la suite (J_n) par l'intégrale suivante : $J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Question 4 :

On établit que :

A - $J_1 = \ln(2)$.

B - $J_1 = 2\ln(2)$.

C - $J_1 = \dfrac{\ln(2)-1}{2}$.

D - $J_1 = \dfrac{\ln(2)}{2}$.

Question 5 :

On démontre que :

A - $J_n + J_{n+2} = \dfrac{2}{n+1}$.

B - $J_n + J_{n+2} = \dfrac{2}{n+2}$.

C - $J_n + J_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$.

D - $J_n + J_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$.

Question 6 :

On établit que :

A - $J_3 = \dfrac{1-\ln(2)}{2}$.

B - $J_3 = \dfrac{4-3\ln(2)}{6}$.

C - $J_5 = \dfrac{-1+2\ln(2)}{4}$.

D - $J_5 = \dfrac{-1+6\ln(2)}{12}$.

Question 7 :

On établit que :

A - $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+2t^3+2t^5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln(2) + \frac{1}{2}$.

B - $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+2t^3+2t^5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln\left(2\sqrt{e}\right)$.

C - $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+2t^3+2t^5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\sqrt{2e}\right)$.

D - $\displaystyle\int_0^1 \frac{t+2t^3+2t^5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(2)+1}{2}$.

Question 8 :

On démontre que la suite J_n est :

A - Convergente car elle est croissante majorée.
B - Divergente car elle est croissante non majorée.
C - Divergente car elle est décroissante non minorée.
D - Convergente car elle est décroissante minorée.

Question 9 :

En utilisant l'un des résultats précédents, on démontre que :

A - $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.
B - $\lim_{n\to+\infty} J_n = +\infty$.
C - $\lim_{n\to+\infty} J_n = -\infty$.
D - $\lim_{n\to+\infty} J_n = 1$.

PARTIE III

Une population de grenouilles comptait 1 000 têtes en 2010, année de l'ouverture d'une nouvelle autoroute proche de leur lieu de vie.
On a remarqué que, d'une année sur l'autre, la moitié de la population des grenouilles décroissait de 40% tandis que l'autre moitié augmentait de 100 éléments.
On appelle G_n le nombre de grenouilles l'année 2010+n.

Question 10 :

On démontre que :

A - $G_{n+1} = 0,9 \times G_n + 100$.
B - $G_{n+1} = 0,8 \times G_n + 100$.
C - $G_{n+1} = 1,1 \times G_n + 100$.
D - $G_{n+1} = 1,6 \times G_n + 100$.

Question 11 :

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on démontre que :

A - $G_n = 500 \times 1,6^n + 500$
B - $G_n = 400 \times 1,1^n + 600$
C - $G_n = 500 \times 0,8^n + 500$
D - $G_n = 500 \times 0,9^n + 500$

Question 12 :

On établit que :

A - La population de grenouille va s'éteindre.
B - La population de grenouilles ne va pas s'éteindre, mais va décroître vers 600.
C - La population de grenouilles ne va pas s'éteindre, mais va décroître vers 500.
D - La population de grenouilles va croître.

PARTIE IV

On donne les points de l'espace suivants : $A(1,2,3)$, $B(-1,-2,5)$, $C(1,3,-2)$, $D(0,0,2)$.

Question 13 :

t étant un nombre réel, on démontre que la droite (AB) :

A - a pour représentation paramétrique le système $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2+t \\ y & = & -4+2t \\ z & = & 2+3t \end{array}\right.$

B - a pour représentation paramétrique le système $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & 2-2t \\ z & = & 3-t \end{array}\right.$

C - a pour représentation paramétrique le système $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-2t \\ y & = & 2-4t \\ z & = & 3+2t \end{array}\right.$

D - a pour représentation paramétrique le système $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+t \\ y & = & -2+2t \\ z & = & -1+3t \end{array}\right.$

Question 14 :

On démontre que :

A - Le plan médiateur (P) du segment $[AB]$ a pour équation cartésienne, $x+2y-z+3=0$.

B - Le plan médiateur (P) du segment $[AB]$ a pour équation cartésienne, $-x-2y+z+4=0$.

C - Le plan médiateur (P) du segment $[AB]$ a pour équation cartésienne, $x+2y+z+4=0$.

D - Le plan médiateur (P) du segment $[AB]$ a pour équation cartésienne, $-x-2y+z+3=0$.

Question 15 :

On démontre que :

A - Le plan (P') perpendiculaire au plan (P) et contenant la droite (CD) a pour équation cartésienne, $5x-3y-z+2=0$.

B - Le plan (P') perpendiculaire au plan (P) et contenant la droite (CD) a pour équation cartésienne, $-5x+3y+z-2=0$.

C - Le plan (P') perpendiculaire au plan (P) et contenant la droite (CD) a pour équation cartésienne, $-x-3y+4z-2=0$.

D - Le plan (P') perpendiculaire au plan (P) et contenant la droite (CD) a pour équation cartésienne, $-x-3y+4z+2=0$.

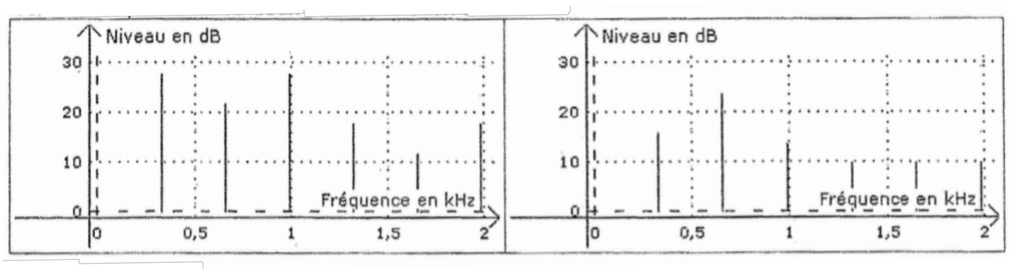
PARTIE PHYSIQUE

Questions liées :
17 à 21
23 et 24
25 et 26
27 et 28
29 et 30

Données numériques :
Célérité d'une onde électromagnétique dans le vide : 3×10^8 m.s^{-1}
Charge élémentaire : $1,6 \times 10^{-19}$ C
Masse de l'électron : $9,1 \times 10^{-31}$ kg
$3,14 < \pi < 3,15$
$3,16 < \sqrt{10} < 3,17$
$1,17 < \dfrac{1}{\sqrt{0,9}} < 1,18$
$2,29 < 0,19^{-0,5} < 2,3$
$0,301 < \log(2) < 0,302$

Question 16 :

Soient les spectres des deux sons musicaux suivants :



Ces deux sons ont :

A - même hauteur.

B - des hauteurs différentes.

C - même timbre.

D - des timbres différents.

Question 17 :

Deux harmoniques d'un son musical ont pour fréquence 1,76 kHz et 2,20 kHz. La fréquence de l'onde sonore correspondante peut être :

A - comprise entre 200 Hz et 300 Hz.

B - comprise entre 300 Hz et 500 Hz.

C - comprise entre 500 Hz et 1 kHz.

D - plus grande que 1 kHz.

Question 18 :

La vitesse du son dans l'air étant de 340 m.s^{-1}, la longueur d'onde dans l'air de cette onde sonore peut être :

A - plus petite que 20 cm.

B - comprise entre 20 cm et 50 cm.

C - comprise entre 50 cm et 1 m.

D - plus grande que 1 m.

Question 19 :

On se place à une distance de 1 m, en face du haut-parleur qui émet ce son. Le niveau sonore est alors de 100 dB.
À côté de ce premier haut-parleur, on en place un deuxième identique qui émet exactement le même son dans le même sens. À 1 m de distance, en face des hauts-parleurs, le niveau sonore est :

A - compris entre 100 et 102 dB.

B - compris entre 102 et 110 dB.

C - compris entre 110 et 160 dB.

D - plus grand que 160 dB.

Question 20 :

On considère que si un haut-parleur est placé au centre d'une sphère de rayon r, la puissance sonore répartie sur toute la surface de la sphère est indépendante de r.
Si on se place à 10 m en face d'un seul haut-parleur réglé comme dans la question précédente, le niveau sonore devient :

A - plus petit que 5 dB.

B - compris entre 5 dB et 35 dB.

C - compris entre 35 dB et 85 dB.

D - plus grand que 85 dB.

Question 21 :

Le haut parleur qui émet cette onde sonore est maintenant placé sur un véhicule qui s'éloigne de l'auditeur. La fréquence de l'onde que reçoit l'auditeur peut être de :

A - 400 Hz.

B - 500 Hz.

C - 800 Hz.

D - 1,00 kHz.

Question 22 :

On place dans un faisceau laser un cheveu. Sur un écran situé à 1,0 m du cheveu, on observe une figure de diffraction dont la tache centrale a une largeur de 1,0 cm. La longueur d'onde dans le vide du laser est de 600 nm. L'épaisseur du cheveu est :

A - plus petite que 10 μm.

B - comprise entre 10 μm et 100 μm.

C - comprise entre 100 μm et 1 000 μm

D - plus grande que 1 000 μm.

Question 23 :

Titan et Japet sont deux des plus gros satellites de Saturne. Japet a un rayon orbital moyen de $3\,561 \times 10^3$ km et une période de révolution de 79,331 jours. Le rayon orbital moyen de Titan est de $1\,222 \times 10^3$ km.
Par rapport à un référentiel lié au centre de Saturne, Japet a une vitesse moyenne qui est :

A - plus petite que 30 km.h^{-1}.

B - comprise entre 30 km.h^{-1} et 300 km.h^{-1}.

C - comprise entre 300 km.h^{-1} et 3 000 km.h^{-1}.

D - plus grande que 3 000 km.h^{-1}.

Question 24 :

La période de révolution de Titan est :

A - plus petite que 1 jour.

B - comprise entre 1 et 10 jours.

C - comprise entre 10 et 100 jours.

D - plus grande que 100 jours.

Question 25 :

Soient deux plaques rectangulaires conductrices placées dans le vide, parallèlement l'une à l'autre, et distantes de $e = 1,0$ cm. On applique entre les deux plaques une différence de potentiel $U = 10$ V. Pour qu'un électron, avec une vitesse initialement nulle puisse se déplacer d'une plaque à l'autre, il faut qu'il soit initialement placé au voisinage de la plaque au potentiel :

A - le plus faible.

B - le plus élevé.

L'intensité de la force subie par l'électron est :

C - plus petite que 10^{-17} N.

D - plus grande que 10^{-17} N.

Question 26 :

En négligeant tout effet relativiste, la vitesse de l'électron quand il atteint l'autre plaque est

A - plus petite que 3×10^3 m.s^{-1}.

B - comprise entre 3×10^3 m.s^{-1} et 3×10^4 m.s^{-1}.

C - comprise entre 3×10^4 m.s^{-1} et 3×10^5 m.s^{-1}.

D - plus grande que 3×10^5 m.s^{-1}.

Question 27 :

On veut construire un pendule pesant à l'aide d'une masse m et d'un fil inextensible de longueur L dans un champ de pesanteur $g = 10$ N.kg^{-1}. La période T d'un tel pendule est égale à :

A - $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{g}{L}}$.

B - $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$.

C - $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{m}}$.

D - $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{L}}$.

Question 28 :

On veut que cette période soit d'environ 2 s. Pour cela, on peut prendre :

A - m=1 kg et L=10 cm.

B - m=1 kg et L=1 m.

C - m=25 g et L=10 cm.

D - m=25 g et L=1 m.

Question 29 :

Dans un référentiel terrestre, un électron a un mouvement rectiligne et uniforme à une vitesse v égale à 90% de la vitesse c de la lumière dans le vide. On rappelle que le coefficient de dilatation temporelle est $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\text{v}^2}{c^2}}}$

La durée dans ce référentiel terrestre pour que cet électron parcoure une distance de 1 m est :

A - plus petite que 1 ps.

B - comprise entre 1 ps et 1 ns.

C - comprise entre 1 ns et 1 μs.

D - plus grande que 1 μs.

Question 30 :

Dans le référentiel lié à l'électron, cette durée devient :

A - plus petite que 5 ns.

B - comprise entre 5 ns et 50 ns.

C - comprise entre 50 ns et 5 μs.

D - plus grande que 5 μs.