Épreuve 2016

Mathématiques & Physique

(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2016.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 3h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

PARTIE MATHEMATIQUES

NOTATIONS

Les lettres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ désignent respectivement les ensembles des réels et des entiers naturels.
La lettre e désigne la constante de Neper et l'application qui à x associe e^x désigne l'exponentielle de base e. Le nombre i désigne le nombre complexe défini par : $i^2 = -1$.

Question 1 :

Soient deux suites u et v vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{v}_n \leqslant 2u_n$$

A - Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$, alors la suite v converge.

B - Si la suite u converge, alors la suite v converge.

C - Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$, alors la suite u converge.

D - Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{v}_n = +\infty$.

Question 2 :

L'équation réduite de la tangente en -1 à la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^3+x^2}$ est :

A - $3x - 3y + 6 = 0$

B - $y = x + 2$

C - $y = x - 2$

D - $-2x + 2y + 4 = 0$

Question 3 :

La valeur moyenne M de la fonction $\{f : x \mapsto x^3 + x^2 - x + 1\}$ sur [-1 ;2] est :

A - $M = 3$

B - $M = 5$

C - $M = \dfrac{33}{4}$

D - $M = \dfrac{11}{4}$

Question 4 :

Une primitive de la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x}$ est :

A - $F(x) = xe^{-x}$

B - $F(x) = -xe^{-x}$

C - $F(x) = (-x - 1 + 2e^x)\, e^{-x}$

D - $F(x) = (-x + 1)\, e^{-x}$

Question 5 :

Soient f et g deux fonctions continues sur $I = [a; b]$.

A - Si pour tout réel x de I, on a $f(x) = g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

B - Si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, alors pour tout réel x de I, on a $f(x) = g(x)$.

C - Si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

D - Si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, alors pour tout réel x de I, on a $f(x) \geqslant g(x)$.

Question 6 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a < 0$ et $b^2 - 4ac > 0$. Soit S l'aire de la surface sous l'arche parabolique, comprise entre la droite d'équation $y = 0$ et la courbe représentative de f.

A - S vaut le tiers de sa base multipliée par la hauteur de l'arche.

B - S vaut la moitié de sa base multipliée par la hauteur de l'arche.

C - S vaut les deux tiers de sa base multipliée par la hauteur de l'arche.

D - S vaut les trois quart de sa base multipliée par la hauteur de l'arche.

Question 7 :

Soit $z = -\sqrt{3} + i$.

A - z^{2013} est un imaginaire pur

B - z^{2014} est un imaginaire pur

C - z^{2015} est un réel

D - z^{2016} est un réel

Question 8 :

L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-8}{z-3} = z$ est :

A - $S = \{2 + 2i\}$

B - $S = \{2 - 2i\}$

C - $S = \{2 + 2i; -2 + 2i\}$

D - $S = \emptyset$

Question 9 :

Soient A, B et O des points d'affixes respectives 1, i et 0. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 1| = |\overline{z} + i|$ est :

A - la droite (AB)

B - la médiatrice du segment $[AB]$

C - le cercle de centre O et de rayon 1.

D - le cercle de diamètre $[AB]$

Question 10 :

Soient les points $A(2;0;3)$ et $B(-1;2;0)$, et la droite (D) de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4+2u \\ y & = & 1-u \\ z & = & -2+u \end{array}\right. ,u \in \mathbb{R}$$

A - Les droites (AB) et (D) ne sont pas coplanaires

B - Les droites (AB) et (D) sont coplanaires

C - Les droites (AB) et (D) sont sécantes

D - Les droites (AB) et (D) sont parallèles

Question 11 :

$SABDC$ est une pyramide de base carrée $ABDC$. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[SA]$, $[SB]$ et $[BD]$, et O désigne le centre du carré $ABDC$.

A - L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{IJ}$, $t \in \mathbb{R}$ est la droite (AD)

B - L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{JM} = u\overrightarrow{SD}$, $u \in \mathbb{R}$ est la droite (JK)

C - L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{SA}$, $k \in \mathbb{R}$ est la droite (BJ)

D - L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{SB}+y\overrightarrow{SC}$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan (ABC)

Question 12 :

A - Si deux droites de l'espace sont perpendiculaires à une même troisième, elles sont parallèles entre elles.

B - Si deux droites de l'espace sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles.

C - Si deux droites de l'espace sont parallèles, elles admettent une droite perpendiculaires à elles deux.

D - Si deux droites de l'espace sont parallèles à une même troisième, les trois droites sont coplanaires.

Question 13 :

Soit X une variable aléatoire qui prend des valeurs positives. On suppose que :

$$P(1 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{3}{8}$$

Si X suit une loi uniforme sur $[0;N]$, alors on a :

A - $N = 5,3$

B - $N = 8$

C - $N = \frac{6}{8}$

D - $N = \frac{16}{3}$

Question 14 :

Soit X une variable aléatoire qui prend des valeurs positives. On suppose que :

$$P(1 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{3}{8}$$

Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors on a :

A - $\lambda = -\ln(2)$

B - λ prend deux valeurs dont la valeur $\ln(2)$

C - $\lambda = \ln\left(\frac{\sqrt{13}+1}{4}\right)$

D - Il n'existe pas de tel λ.

Question 15 :

Soit X une variable aléatoire d'espérance 10 et de variance 8. Si X suit une loi binomiale de paramètre n et p, alors :

A - $n = 20$ et $p = 0,5$

B - $n = 25$ et $p = 0,4$

C - $n = 40$ et $p = 0,25$

D - $n = 50$ et $p = 0,2$

PARTIE PHYSIQUE

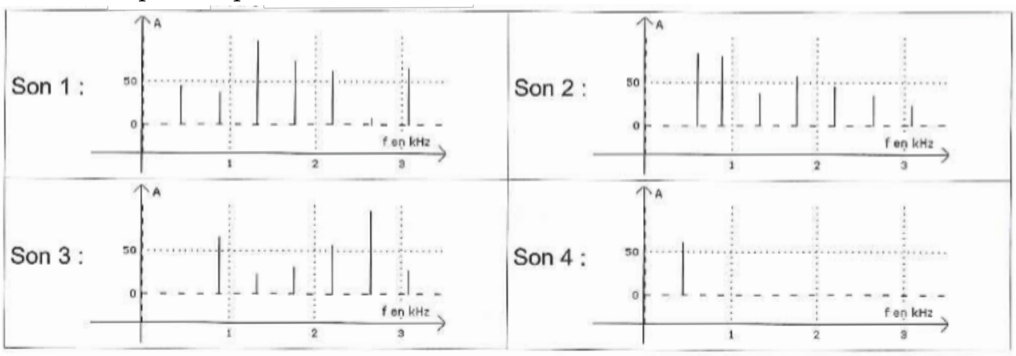
Questions liées :
16 à 20
21 à 25
26 à 30

Données numériques :
Constante universelle de gravitation : $G \simeq 6,67 \times 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}
$3,14 < \pi < 3,15$
$1,73 < \sqrt{3} < 1,74$
$0,954 < 10^{-0,02} < 0,955$

Document, construction d'une gamme naturelle :
Dans ce document, pour un son musical, on désignera par harmonique de rang 1 celui ayant la fréquence du son. Les harmoniques suivants seront appelés de rang 2, rang 3, etc.
Si l'harmonique de rang 1 correspond à une note musicale (comme do, ré, mi, etc.), l'harmonique de rang 2 correspond à la même note mais plus aiguë.
Si l'harmonique de rang 1 correspond à un do, l'harmonique de rang 3 correspond à un sol et celui de rang 5 à un mi.
Si l'harmonique de rang 1 correspond à un sol, l'harmonique de rang 3 correspond à un ré, et celui de rang 5 à un si.
Si l'harmonique de rang 1 correspond à un fa, l'harmonique de rang 3 correspond à un do, et celui de rang 5 à un la.
On peut alors avec ces propriétés construire la gamme naturelle de do majeur dont les notes sont dans l'ordre des fréquences croissantes do, ré, mi, fa, sol, la, si, do, la fréquence du deuxième do étant le double de celle du premier.

Question 16 :

Soient les quatre spectres sonores suivants :



Parmi ces sons, quel est celui qui ne correspond pas à la définition d'un son musical :

A - Son 1.

B - Son 2.

C - Son 3.

D - Son 4.

Question 17 :

On choisi deux sons musicaux parmi les quatre spectres sonores précédents.

A - Ces deux sons ont même hauteur.

B - Ces deux sons ont même timbre.

C - Ces deux sons ont même fondamental.

D - Ces deux sons ont même niveau.

Question 18 :

On cherche à construire une gamme naturelle de do majeur pour laquelle la note «sol» ait une fréquence de 399 Hz.
Une note «do» a alors une fréquence comprise entre :

A - 199 Hz et 201 Hz.

B - 265 Hz et 267 Hz.

C - 531 Hz et 533 Hz.

D - 598 Hz et 600 Hz.

Question 19 :

La note «mi» a une fréquence de :

A - $\frac{3}{4} \times 399 \simeq 299$ Hz.

B - $\frac{4}{5} \times 399 \simeq 319$ Hz.

C - $\frac{5}{6} \times 399 \simeq 333$ Hz.

D - $\frac{6}{7} \times 399 \simeq 342$ Hz.

Question 20 :

La note «la» a une fréquence comprise entre

A - 410 Hz et 430 Hz.

B - 430 Hz et 450 Hz.

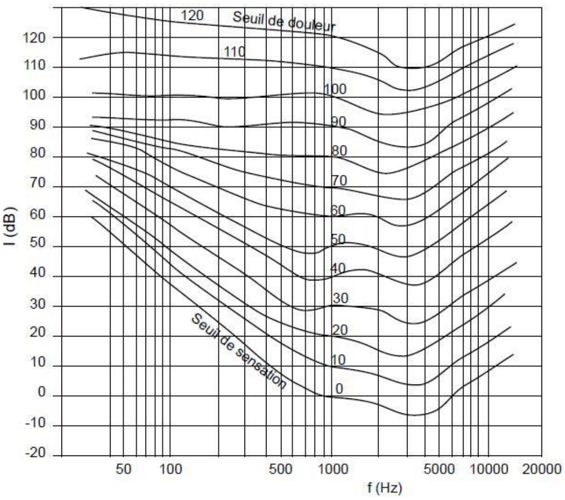
C - 450 Hz et 470 Hz.

D - 470 Hz et 490 Hz.

Document, diagramme de Fletcher :

Ce diagramme indique les courbes d'isotonie, c'est à dire les courbes qui donnent la même sensation de niveau sonore. On constate ainsi que pour un niveau donné, on n'entend pas toutes les fréquences de la même façon.

Par ailleurs, ces courbes dépendent également de l'état de fatigue, de l'âge, de maladies éventuelles, de problèmes acoustiques innés ou acquis,...



(D'après http ://devilliere.thierry.free.fr/Sciences/index.php ?page=3&menu=2)

Document, filtrage d'un son :

Soit un son créé en appliquant une tension électrique u_1 à un haut-parleur. Pour modifier les caractéristiques de ce son, on peut utiliser un filtre électronique qui transforme la tension u_1 en une nouvelle tension u_2 qu'on applique alors au haut-parleur.

Soit une tension u_1 sinusoïdale de fréquence f. Soit I_1 (en W.m^{-2}) l'intensité sonore correspondante délivrée par le haut-parleur (donc en absence de filtre). En présence du filtre, l'intensité sonore devient I_2. Dans la suite, f_c est une constante positive en Hz et A une constante positive sans dimension.

Pour un filtre passe-bas qui atténue les hautes fréquences, $\dfrac{I_2}{I_1} = A\dfrac{f_c^2}{f^2+f_c^2}$.

Pour un filtre passe-haut qui atténue les basses fréquences, $\dfrac{I_2}{I_1} = A\dfrac{f^2}{f^2+f_c^2}$.

Pour un filtre passe-bande qui atténue les basses et les hautes fréquences, $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{A}{1+\left(\dfrac{f}{f_c}-\dfrac{f_c}{f}\right)^2}$.

Pour un filtre coupe-bande qui accentue les basses et les hautes fréquences, $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{A+\left(\dfrac{f}{f_c}-\dfrac{f_c}{f}\right)^2}{1+\left(\dfrac{f}{f_c}-\dfrac{f_c}{f}\right)^2}$ avec A compris entre 0 et 1 (pour le filtre coupe bande uniquement).

Question 21 :

À une fréquence de 100 Hz,

A - Un niveau sonore réel de 50 dB correspond à un niveau sonore ressenti entre 65 dB et 75 dB.

B - Un niveau sonore réel de 70 dB correspond à un niveau sonore ressenti entre 45 dB et 55 dB.

C - Un niveau sonore réel de 70 dB correspond à un niveau sonore ressenti entre 80 dB et 90 dB.

D - Un niveau sonore réel de 80 dB correspond à un niveau sonore ressenti entre 60 dB et 70 dB.

Question 22 :

La célérité du son dans l'air étant de 340 m.s^{-1}, la longueur d'onde d'un son de 100 Hz est comprise entre :

A - 1 mm et 1 cm.

B - 1 cm et 10 cm.

C - 10 cm et 1 m.

D - 1 m et 10 m.

Question 23 :

On veut pouvoir écouter dans de bonnes conditions de la musique avec un faible niveau sonore. Pour cela, il faut utiliser :

A - Un filtre passe-bas.

B - Un filtre passe-haut.

C - Un filtre passe-bande.

D - Un filtre coupe-bande.

Question 24 :

On veut que le filtre soit tel que pour des fréquences de 500 Hz et 6 000 Hz, le niveau sonore après le haut-parleur avec filtre soit plus faible de 0,2 dB que le niveau sans filtre.
Il faut pour cela que f_c soit comprise entre :

A - 500 Hz et 1 000 Hz.

B - 1 000 Hz et 2 000 Hz.

C - 2 000 Hz et 4 000 Hz.

D - 4 000 Hz et 6 000 Hz.

Question 25 :

Il faut également que A soit comprise entre :

A - 10^{-4} et 10^{-3}.

B - 0,001 et 0,01.

C - 0,01 et 0,1.

D - 0,1 et 1.

Question 26 :

Soit un satellite de centre S en orbite autour d'une planète de centre P. Dans un référentiel galiléen cartésien centré en P, l'équation du mouvement de S s'écrit $\begin{cases} x = 3,85 \times 10^5 \cos(0,217 \times t) \\ y = 3,85 \times 10^5 \sin(0,217 \times t) \end{cases}$, x et y étant en km et t en jours.

Pour effectuer une révolution complète, le satellite met entre :

A - 1 jour et 10 jours.

B - 10 jours et 100 jours.

C - 100 jours et une année.

D - une année et quatre années.

Question 27 :

La valeur la plus proche d'une vitesse de 1 km par jour est :

A - $1,16 \times 10^{-5}$ m.s^{-1}.

B - $2,78 \times 10^{-4}$ m.s^{-1}.

C - 0,0116 m.s^{-1}.

D - 0,278 m.s^{-1}.

Question 28 :

La vitesse du satellite est comprise entre :

A - 0,3 m.s^{-1} et 3 m.s^{-1}.

B - 3 m.s^{-1} et 30 m.s^{-1}.

C - 30 m.s^{-1} et 300 m.s^{-1}.

D - 300 m.s^{-1} et 3 000 m.s^{-1}.

Question 29 :

Si un satellite décrit un cercle de rayon R à une vitesse v autour d'une planète de masse m, on a, G étant la constante de gravitation universelle :

A - $G \times m = \mathrm{v} \times R$.

B - $G \times m = \mathrm{v} \times R^2$.

C - $G \times m = \mathrm{v}^2 \times R$.

D - $G \times m = \mathrm{v}^2 \times R^2$.

Question 30 :

La masse de P est comprise entre :

A - 10^{18} kg et 10^{20} kg.

B - 10^{20} kg et 10^{22} kg.

C - 10^{22} kg et 10^{24} kg.

D - 10^{24} kg et 10^{26} kg.