Épreuve 2017

Mathématiques & Physique

(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2017.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 3h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

PARTIE MATHEMATIQUES

Questions liées :
11 à 14

NOTATIONS

Les lettres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ désignent respectivement les ensembles des réels et des entiers naturels.
La lettre e désigne la constante de Neper et l'application qui à x associe e^x désigne l'exponentielle de base e. Le nombre i désigne le nombre complexe défini par : $i^2 = -1$.

Question 1 :

Soit n un entier naturel non nul. On définit la fonction f_n par : $f_n(x) = \dfrac{2e^{nx}}{e^{nx}+5}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'expression : $u_n = \dfrac{n}{\ln(5)} \displaystyle\int_0^{\frac{\ln(5)}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. On peut montrer que :

A - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

B - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante

C - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

D - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante

Question 2 :

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par : $f(x) = \displaystyle\int_1^x e^{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

A - f est strictement décroissante

B - f est strictement croissante

C - f n'admet pas de maximum

D - On ne peut rien dire au sujet de la monotonie de f

Question 3 :

La lettre n désignant un entier naturel non nul, on considère une urne qui contient n boules blanches et 3 boules noires, ces boules étant indiscernables au toucher.
On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne.

A - Il existe deux entiers naturels n pour lesquels la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $\dfrac{9}{22}$

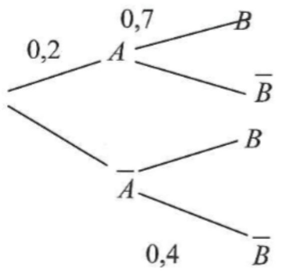
B - Il existe un entier naturel n pour lequel la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $\dfrac{9}{22}$

C - Il n'existe pas d'entier naturel n pour lequel la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $\dfrac{9}{22}$

D - La probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est : $\dfrac{6n}{(n+3)(n+1)}$

Question 4 :

On considère l'arbre de probabilité ci-contre. La probabilité que l'évènement A soit réalisé sachant que l'évènement B est réalisé est :



A - 7/31

B - 6/31

C - 7/30

D - 6/30

Question 5 :

On considère l'algorithme ci-contre. Lorsque l'on saisit la valeur n=6, la valeur u affichée est :

Variables :	i et n sont des entiers naturels et u est un réel
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n Affecter à u la valeur $u+\frac{1}{i}$
Sortie :	Afficher u

A - 2,44

B - 2,27

C - 2,4

D - 2,23

Question 6 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, pour tout entier naturel n non nul, on considère les points M_n d'affixe $z_n = e^{\frac{2n\pi i}{3}}$. D'une manière générale, on considèrera qu'un triangle est défini par trois points distincts du plan.

A - Les points O, M_1 et M_{20} sont alignés

B - Les points O, M_6 et M_9 sont alignés

C - Le triangle OM_1M_{20}, s'il existe, est équilatéral

D - Le triangle OM_6M_9, s'il existe, est équilatéral

Question 7 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non constante de nombres réels. Pour tout entier naturel n, on pose : $\mathrm{v}_n = \sin(u_n)$.

A - On peut choisir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ afin que $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

B - On peut choisir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ afin que $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1

C - La suite $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge toujours

D - La suite $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge toujours

Question 8 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

On appelle (d) la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= t+3 \\ y &= -t+5 \\ z &= 2 \end{cases}$

et (S) la sphère de centre $A(1,-1,0)$ et de rayon 6.

A - La droite (d) et la sphère (S) sont sécantes

B - La droite (d) et la sphère (S) sont sécantes en deux points

C - La droite (d) et la sphère (S) ne sont pas sécantes

D - La droite (d) et la sphère (S) sont tangentes

Question 9 :

On considère l'espace muni d'un repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et les deux droites (d) et (d') admettant pour représentations paramétriques :

$$(d) : \begin{cases} x &= 2t+3 \\ y &= -2t-1 \\ z &= 6t+2 \end{cases} \quad \text{et } (d') : \begin{cases} x &= -t-1 \\ y &= t-1 \\ z &= -3t \end{cases}$$

A - Les droites (d) et (d') sont confondues

B - Les droites (d) et (d') sont sécantes en un point

C - Les droites (d) et (d') sont non sécantes et coplanaires

D - Les droites (d) et (d') sont non sécantes et non coplanaires

Question 10 :

Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité est une fonction f définie par :

$$(d) : \begin{cases} f(x) &= m\sin(x) \text{ pour } x \in [0;\pi] \\ f(x) &= 0 \text{ pour } x \in]-\infty;0[\cup]\pi;+\infty[\end{cases}$$

m étant un nombre réel qui sera choisi en conséquence. On peut vérifier que :

A - Pour $x \in]\pi;+\infty[,\ P(X \leqslant x) = \dfrac{1}{2}$

B - $P(X \geqslant 0) = 0$

C - Pour $x \in [0;\pi]$, $P(X \leqslant x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(x)$ et pour $x \in]-\infty;0[$, $P(X \leqslant x) = 0$

D - $P\left(\dfrac{\pi}{4} \leqslant X \leqslant \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Question 11 :

Soient les nombres complexes définis par : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}\,;\ z_2 = 2 + 2i$. Le nombre complexe défini par $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ vérifie :

A - $Z = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

B - $Z = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

C - $Z = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

D - $Z = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

Question 12 :

Les nombres complexes z_1 et z_2 vérifient :

A - Le complexe $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ a pour module $\sqrt{2}$ et pour argument $\dfrac{\pi}{3}$.

B - Le complexe $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ a pour module $2\sqrt{2}$ et pour argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

C - Le complexe $z_2 = 2 + 2i$ a pour module $\sqrt{2}$ et pour argument $\dfrac{\pi}{4}$.

D - Le complexe $z_2 = 2 + 2i$ a pour module $2\sqrt{2}$ et pour argument $\dfrac{3\pi}{4}$.

Question 13 :

On en déduit :

A - Le complexe $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ a pour module 2 et pour argument $\dfrac{5\pi}{12}$

B - Le complexe $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ a pour module $\dfrac{1}{2}$ et pour argument $-\dfrac{5\pi}{12}$

C - Le complexe $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ a pour module 1 et pour argument $\dfrac{\pi}{12}$

D - Le complexe $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ a pour module 1 et pour argument $-\dfrac{\pi}{12}$

Question 14 :

On obtient alors :

A - $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

B - $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

C - $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

D - $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Question 15 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^4$.
L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2 est :

A - $y = 16(x - 2)$

B - $y = 8(x - 1)$

C - $y = 8(x - 2)$

D - $y = x - 1$

PARTIE PHYSIQUE

Questions liées :
16 à 22
23 à 27
28 à 30

Question 16 :

Un véhicule se rapproche avec une vitesse v d'un radar permettant le contrôle des vitesses. On suppose que l'air est immobile par rapport au radar (absence de vent). Un premier modèle de radar émet des impulsions ultrasonores avec un intervalle de temps τ entre deux impulsions successives. Le radar détecte alors les signaux ultrasonores renvoyés par le véhicule et mesure l'intervalle de temps τ' entre deux de ces signaux successifs.
Soit d la distance entre le radar et le véhicule au moment où une impulsion ultrasonore est émise. Soit Δt l'intervalle de temps entre l'émission de l'impulsion et la réception du signal correspondant. On note c_S la célérité des ultrasons dans l'air. On a :

A - $d = c_S \dfrac{\Delta t}{2}$

B - $d = (c_S + \mathrm{v}) \dfrac{\Delta t}{2}$

C - $d = (c_S - \mathrm{v}) \dfrac{\Delta t}{2}$

D - $d = (\mathrm{v} - c_S) \dfrac{\Delta t}{2}$

Question 17 :

Pour deux impulsions successives, on note Δt_1 et Δt_2 les intervalles de temps entre l'émission de l'impulsion et la réception du signal correspondant. On a :

A - $\tau - \tau' = \Delta t_1 - \Delta t_2$

B - $\tau - \tau' = \Delta t_1 + \Delta t_2$

C - $\tau + \tau' = \Delta t_1 - \Delta t_2$

D - $\tau + \tau' = \Delta t_1 + \Delta t_2$

Question 18 :

On déduit de tout cela que :

A - $\tau' = \dfrac{c_S - 2\mathrm{v}}{c_S} \tau$

B - $\tau' = \dfrac{c_S}{c_S + 2\mathrm{v}} \tau$

C - $\tau' = \dfrac{c_S + \mathrm{v}}{c_S - \mathrm{v}} \tau$

D - $\tau' = \dfrac{c_S - \mathrm{v}}{c_S + \mathrm{v}} \tau$

Question 19 :

Donc :

A - $\mathrm{v} = \dfrac{\tau - \tau'}{\tau + \tau'} c_S$

B - $\mathrm{v} = \dfrac{\tau' - \tau}{\tau + \tau'} c_S$

C - $\mathrm{v} = \dfrac{\tau - 2\tau'}{\tau} c_S$

D - $\mathrm{v} = \dfrac{\tau}{\tau + 2\tau'} c_S$

Question 20 :

Un second modèle de radar émet sans interruption une onde ultrasonore de fréquence $f = 40,0$ kHz. On prendra $c_S = 340$ m.s^{-1}.
La longueur d'onde de cette onde est :

A - plus courte que 1 cm

B - comprise entre 1 cm et 10 cm

C - comprise entre 10 cm et 1 m

D - plus grande que 1 m

Question 21 :

Un observateur placé près du radar entend le son du moteur du véhicule qui se rapproche du radar :

A - Plus grave qu'il ne l'est en réalité

B - Plus aiguë qu'il ne l'est en réalité

Le radar mesure la fréquence f' de l'onde renvoyée par le véhicule. Il y a alors un écart $|f' - f| = 10,7$ kHz.

C - $f' < f$

D - $f' > f$

Question 22 :

La vitesse du véhicule est :

A - plus petite que 1 km.h^{-1}

B - comprise entre 1 km.h^{-1} et 10 km.h^{-1}

C - comprise entre 10 km.h^{-1} et 100 km.h^{-1}

D - plus grande que 100 km.h^{-1}

Question 23 :

Un véhicule de masse $m = 1,200$ tonnes, initialement à l'arrêt et soumis à une accélération constante atteint une vitesse v= 72 km.h^{-1} sur une distance de $d = 400$ m. Il lui a fallu pour cela un temps t. d vérifie :

A - $d = \frac{1}{2} \times \mathrm{v} \times t$

B - $d = \mathrm{v} \times t$

C - $d = \frac{1}{2} \times m \times \mathrm{v} \times t$

D - $d = m \times \mathrm{v} \times t$

Question 24 :

A - t est inférieur à 10 s

B - t est compris entre 10 s et 1 min

C - t est compris entre 1 min et 3 min

D - t est plus grand que 3 min

Question 25 :

Le véhicule a subi une force résultante F telle que :

A - $F = \dfrac{2 \times m \times d}{t^2}$

B - $F = \dfrac{2 \times d \times \mathrm{v}}{t^2}$

C - $F = \dfrac{m \times \mathrm{v}}{2 \times t}$

D - $F = \dfrac{m \times \mathrm{v}^2}{2 \times d}$

Question 26 :

A - F est plus petite que 100 N

B - F est comprise entre 100 N et 1 000 N

C - F est comprise entre 1 000 N et 10 000 N

D - F est plus grande que 10 000 N

Question 27 :

Cette force a apporté au véhicule une énergie :

A - plus petite au 1 kJ

B - comprise entre 1 kJ et 10 kJ

C - comprise entre 10 kJ et 100 kJ

D - plus grande que 100 kJ

Question 28 :

La résolution d'une image numérique est (en pixels) $4\,608 \times 3\,456$. Ceci correspond à une résolution de :

A - 4 millions de pixels

B - 8 millions de pixels

C - 12 millions de pixels

D - 16 millions de pixels

Question 29 :

Chaque pixel est stocké sur 24 bits. Sachant que 1 octet = 8 bits, 1 Kio = 1 024 octets, 1 Mio = 1 024 Kio et 1 Gio = 1 024 Mio, la taille de l'image (non compressée) est :

A - plus petite que 1 Mio

B - comprise entre 1 Mio et 10 Mio

C - comprise entre 10 Mio et 100 Mio

D - plus grande que 100 Mio

Question 30 :

Sur une carte mémoire de 16 Gio, on peut stocker :

A - moins de 1 000 images de cette taille

B - entre 1 000 et 10 000 images de cette taille

C - entre 10 000 et 100 000 images de cette taille

D - plus de 100 000 images de cette taille