Épreuve 2018
Mathématiques & Physique
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2018.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 3h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

PARTIE MATHEMATIQUES

Questions liées :
1 à 3
4 à 7
8 à 11
12 à 15

NOTATIONS

Les lettres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ désignent respectivement les ensembles des réels et des entiers naturels.
La lettre e désigne la constante de Neper et l'application qui à x associe e^x désigne l'exponentielle de base e. Le nombre i désigne le nombre complexe défini par : $i^2 = -1$.

PARTIE I

Une étude a montré que l'âge en mois auquel apparaissent les premiers mots de vocabulaire chez un enfant pris au hasard dans la population peut se modéliser par une variable aléatoire suivant la loi normale $N(11,5;16)$.
On donne, pour une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite :

- $P(X < 2) \simeq 0,977$
- $P(X < 0,5) \simeq 0,691$
- $P(X < 0,125) \simeq 0,550$
- $P(X < 0,03125) \simeq 0,512$

Question 1 :

La probabilité p_1 qu'un enfant de cette population ait prononcé ses premiers mots avant ses 9 mois et demi est d'environ :

A - $p_1 \simeq 0,050$

B - $p_1 \simeq 0,191$

C - $p_1 \simeq 0,309$

D - $p_1 \simeq 0,450$

Question 2 :

La probabilité p_2 qu'un enfant de cette population ait prononcé ses premiers mots dans le cours de son $12^{\text{ème}}$ mois est d'environ :

A - $p_2 \simeq 0,010$

B - $p_2 \simeq 0,024$

C - $p_2 \simeq 0,512$

D - $p_2 \simeq 0,550$

Question 3 :

La probabilité p_3 qu'un enfant de cette population ait prononcé ses premiers mots après l'âge de 19 mois et demi est d'environ :

A - $p_3 \simeq 0,023$
B - $p_3 \simeq 0,309$
C - $p_3 \simeq 0,691$
D - $p_3 \simeq 0,977$

PARTIE II

On considère sur $[0; 2\pi]$ les courbes C d'équation $y = e^{-x}$, C' d'équation $y = -e^{-x}$, et la courbe Γ représentant la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}\sin(x)$.

Question 4 :

Les courbes C , C' et Γ vérifient :

A - La courbe Γ est au-dessous de C et C'.
B - La courbe Γ est au-dessus de C et C'.
C - La courbe Γ est au-dessus de C', mais oscille autour de C.
D - La courbe Γ est au-dessous de C, mais oscille autour de C'.

Question 5 :

La dérivée f' de la fonction f sur $[0; 2\pi]$ peut s'écrire :

A - $f'(x) = -e^{-x}\cos(x)$
B - $f'(x) = e^{-x}\left(\cos(x) - \sin(x)\right)$
C - $f'(x) = -e^{-x}\left(\cos(x) + \sin(x)\right)$
D - $f'(x) = \sqrt{2}e^{-x}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Question 6 :

La courbe Γ touche C au point d'abscisse :

A - $x = \dfrac{\pi}{2}$
B - $x = \pi$
C - $x = \dfrac{3\pi}{2}$
D - $x = 2\pi$

Question 7 :

La tangente à Γ en ce point de contact admet pour équation :

A - $y = -e^{-\pi}x + \pi e^{-\pi}$
B - $y = -e^{-\frac{\pi}{2}}x + \left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{2}}$
C - $y = e^{-2\pi}(x - 2\pi)$
D - $y = e^{-\frac{3\pi}{2}}\left(x - 1 - \dfrac{3\pi}{2}\right)$

PARTIE III

On souhaite étudier une modélisation d'une tour de contrôle aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. L'unité sur chaque axe est 1 km.
Le plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ représente le sol. Les deux «routes aériennes» à contrôler sont représentées par deux droites D_1 et D_2, dont on connait les représentations paramétriques :

$$(D_1) : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 3+a \\ y & = & 9+3a \\ z & = & 2 \end{array} \right. ,a \in \mathbb{R} \;\; ; (D_2) : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0,5+2b \\ y & = & 4+b \\ z & = & 4-b \end{array} \right. ,b \in \mathbb{R}$$

Question 8 :

Les doites D_1 et D_2 :

A - sont parallèles.

B - sont sécantes.

C - sont coplanaires.

D - sont non coplanaires.

Question 9 :

On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées $S(3;4;0,1)$, un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R).
Un technicien souhaite savoir s'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites D_1 et D_2. Le point S vérifie :

A - $S \in D_1$

B - $S \in D_2$

C - $S \in (R)$

D - S n'appartient à aucune de ces droites.

Question 10 :

Soit P_1 le plan contenant S et D_1, et P_2 le plan contenant S et D_2. Les plans P_1 et P_2 se coupent selon la droite Δ.

A - Les droites D_1 et Δ sont sécantes.

B - Les droites D_1 et Δ sont parallèles.

C - Les droites D_2 et Δ sont sécantes.

D - Les droites D_2 et Δ sont parallèles.

Question 11 :

Les droites (R) et Δ :

A - ont un unique point d'intersection en S.

B - se coupent en un point distinct de S.

C - sont confondues.

D - sont parallèles distinctes.

PARTIE IV

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$ et n un entier naturel non nul. On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p. On répète cette épreuve de façon identique et indépendante au maximum n fois et on s'arrête à la réalisation du premier succès. La variable X prends :

- la valeur 0 si aucun succès n'a été rencontré,
- la valeur k si le premier succès est rencontré lors de la k-ième répétition pour $1 \leqslant k \leqslant n$

Question 12 :

On montre que :

A - $P(X = 0) = p^n$
B - $P(X = 0) = (1 - p)^n$
C - $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$
D - $P(X = k) = p^k(1 - p)^{n-k}$

Question 13 :

L'espérance mathématiques $E(X)$ de X s'écrit :

A - $E(X) = np$
B - $E(X) = n(1 - p)$
C - $E(X) = np(1 - p)$
D - $E(X) = p\left(1 + 2(1 - p) + 3(1 - p)^2 + ... + n(1 - p)^{n-1}\right)$

On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

Question 14 :

$E(X)$ vérifie :

A - $E(X) = f(p)$
B - $E(X) = f(1 - p)$
C - $E(X) = pf'(1 - p)$
D - $E(X) = (1 - p)f'(p)$

Question 15 :

On montre ainsi, que pour $x \neq 1$ et $0 < p < 1$:

A - $f(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$
B - $f'(x) = \dfrac{1 - x^n(1 + n - nx)}{(1 - x)^2}$
C - $E(X) = \dfrac{1}{1 - p} - \dfrac{p^n}{1 - p} - np^n$
D - $E(X) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p}(1 - p)^n - n(1 - p)^n$

PARTIE PHYSIQUE

Questions liées :
16 à 21
22 à 26
27 à 30

PARTIE P1 : Etude d'un instrument de musique

Document P1-1 - Le clairon

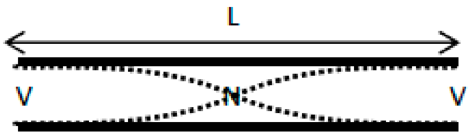
Instrument à vent, en cuivre, à embouchure, sans pistons (donc naturel), utilisé principalement dans les fanfares militaires. Les sons sont produits par la vibration des lèvres contre une embouchure en forme de bassin. Le tube est d'une longueur théorique de 1,475 mètres (pour le clairon appelé en «clairon en *si* bémol (*si* b)»)...

...Les sonneries de clairon en *si* bémol utilisent seulement cinq notes (même si le clairon est capable d'en sortir plus de cinq) : *si* b_2, fa_3, *si* b_3, $ré_4$ et fa_4 (voir document P1-3). Les sonneries sont groupées en sonneries propres à un régiment, sonneries de combat et sonneries ponctuant la journée.

(D'après http ://www.universalis.fr/encyclopedie/clairon/)

Document P1-2 - Tuyau ouvert en acoustique

En acoustique, un tuyau de longueur L ouvert à ses deux extrémités est capable de générer une onde sonore de longueur d'onde $\lambda = 2 \times L$, ainsi que tous les harmoniques de cette onde.
Dans l'illustration ci-dessous, V représente un ventre de vibration de l'air et N un noeud.



(D'après http ://c.21-bal.com/pars_docs/refs/2/1138/1138_html_m49ac9155.png)

Document P1-3 - Fréquences (en Hz) des notes des octaves 0 à 5

Octave	0	1	2	3	4	5
do (ou ut)	32,7	65,4	130,8	261,6	523,3	1046,6
do # / ré b	34,6	69,3	138,6	277,2	554,4	1108,8
ré	36,7	73,4	146,8	293,7	587,3	1174,6
ré # / mi b	38,9	77,8	155,6	311,1	622,3	1244,6
mi	41,2	82,4	164,8	329,6	659,3	1318,6
fa	43,7	87,3	174,6	349,2	698,5	1397,0
fa # / sol b	46,2	92,5	185,0	370,0	740,0	1480,0
sol	49,0	98,0	196,0	392,0	784,0	1568,0
sol # / la b	51,9	103,8	207,7	415,3	830,6	1661,2
la	55,0	110,0	220,0	440,0	880,0	1760,0
la # / si b	58,3	116,5	233,1	466,2	932,3	1864,6
si	61,7	123,5	246,9	493,9	987,8	1975,6

(b signifie «bémol» et # «dièse» ; par exemple, la fréquence d'un si bémol de l'octave 2 *si* b_2 est de 233,1 Hz)

(D'après bac S Amérique du Sud 2016)

Document P1-4 - Niveau d'intensité sonore

Le niveau d'intensité sonore L s'exprime en dB (décibel) et est tel que $L = 10 \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ avec $I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2} le seuil d'audibilité et I (en W.m^{-2}) l'intensité du signal reçu par l'oreille.

(D'après TS Physique Chimie Collection Dulaurans Duruphty Hachette)

Document P1-5 - Quelques logarithmes décimaux

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log(x)$	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1

Question 16 :

A - Les longueurs d'onde des cinq notes utilisées pour les sonneries de clairon sont des multiples de la longueur du clairon.

B - Les longueurs d'onde des cinq notes utilisées pour les sonneries de clairon sont des multiples du double de la longueur du clairon.

C - Les fréquences des cinq notes utilisées pour les sonneries de clairon sont à 2% près des multiples de 116,5 Hz.

D - Les fréquences des cinq notes utilisées pour les sonneries de clairon sont à 2% près des multiples de 233,1 Hz.

Question 17 :

La longueur du clairon est égal à la longueur d'onde de la note :

A - *si* b_1

B - *si* b_2

C - fa_3

D - *si* b_3

Question 18 :

Au dessous de la note *si* b_2 (c'est à dire pour une fréquence inférieure celle du *si* b_2), le clairon peut sortir la note :

A - *si* b_0

B - fa_1

C - *si* b_1

D - fa_2

Question 19 :

Au dessus de la note fa_4, parmi les notes suivantes, avec une incertitude inférieure à 2% sur les fréquences, le clairon ne peut sortir qu'une seule et unique note :

A - sol_4

B - la_4

C - si_4

D - do_5

Question 20 :

Un «clairon en *ut*» est un clairon pour lequel les cinq notes utilisées pour les sonneries sont do_3, sol_3, do_4, mi_4 et sol_4. Par rapport à un «clairon en *si* b», la longueur d'un clairon en *ut* est :

A - $\dfrac{28,5}{233,1} \simeq 12$ % plus courte

B - $\dfrac{28,5}{261,6} \simeq 11$ % plus courte

C - $\dfrac{28,5}{261,6} \simeq 11$ % plus longue

D - $\dfrac{28,5}{233,1} \simeq 12$ % plus longue

Question 21 :

À 10 m de distance, le niveau d'intensité sonore créé par un clairon est de 110 dB. Avec deux clairons dans les mêmes conditions, on atteint :

A - 110 dB

B - 113 dB

C - 140 dB

D - 220 dB

PARTIE P2 : Etude d'une horloge de lumière

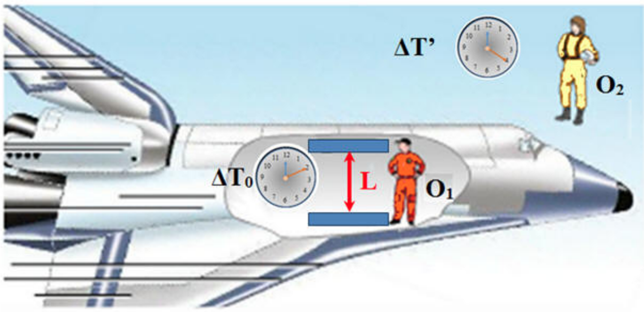
Document P2-1 - Horloge de lumière et relativité restreinte

La relativité restreinte conduit à des conclusions surprenantes dont celle de la dilatation des durées.

L'expérience de pensée suivante permet de démontrer la formule de dilatation des durées.

Elle utilise une «horloge de lumière» qui est un dispositif imaginaire constitué de deux miroirs parallèles (représentés à gauche de l'observateur O_1 dans le schéma ci-dessous) entres lesquels les allers-retours d'un faisceau lumineux rythment le temps.

Schéma :



Dans un vaisseau spatial, un observateur O_1, immobile par rapport à l'horloge de lumière, mesure la durée ΔT_0 d'un aller-retour de la lumière entre les deux miroirs distants d'une longueur L. La lumière se déplace à une vitesse de valeur c.

Un autre observateur O_2, à l'extérieur du vaisseau, regarde l'horloge et la voit se déplacer horizontalement à une vitesse de valeur v constante. Il observe qu'un aller-retour de la lumière dure $\Delta T'$.

Dans le référentiel galiléen lié à O_2, le faisceau de lumière parcourt une distance plus grande que celle parcourue dans le référentiel galiléen relié à O_1 du fait du déplacement du vaisseau (schéma ci-dessus).

(D'après https ://guy-chaumeton.pagesperso-orange.fr/scphysiques2010/tsch08c)

Question 22 :

Dans le référentiel lié à O_2, lors d'un aller-retour entre les deux miroirs, un photon parcourt une distance de :

A - $L + \text{v}\Delta T'$

B - $2L + \text{v}\Delta T'$

C - $\sqrt{L^2 + \text{v}^2\Delta T'^2}$

D - $\sqrt{4L^2 + \text{v}^2\Delta T'^2}$

Question 23 :

La vitesse du photon dans le référentiel lié à O_2 est :

A - $c - \text{v}$

B - $\sqrt{c^2 - \text{v}^2}$

C - $\sqrt{c^2 + \text{v}^2}$

D - $c + \text{v}$

Question 24 :

La durée propre de l'aller-retour d'un photon est :

A - $\dfrac{2L}{c}$

B - $\dfrac{2L}{\sqrt{c^2+\mathrm{v}^2}}$

C - $\dfrac{\sqrt{4L^2+\mathrm{v}^2\Delta T'^2}}{c}$

D - $\dfrac{\sqrt{4L^2+\mathrm{v}^2\Delta T'^2}}{\sqrt{c^2+\mathrm{v}^2}}$

Question 25 :

ΔT_0 et $\Delta T'$ vérifient :

A - $\Delta T_0 = \Delta T'$

B - $c^2\Delta T_0^2 = \left(c^2+\mathrm{v}^2\right)\Delta T'^2$

C - $c^2\Delta T_0^2 = \left(c^2-\mathrm{v}^2\right)\Delta T'^2$

D - $\mathrm{v}^2\Delta T_0^2 = \left(c^2-\mathrm{v}^2\right)\Delta T'^2$

Question 26 :

h étant la constante de Planck, si on note m la masse du vaisseau spatial et si on considère que sa vitesse v est très inférieure à c, ce vaisseau est associé dans la théorie de la dualité onde-particule à une onde de fréquence :

A - $\nu = \dfrac{m\mathrm{v}c}{h}$

B - $\nu = \dfrac{hc}{m\mathrm{v}}$

C - $\nu = \dfrac{mc^2}{h}$

D - $\nu = \dfrac{m\mathrm{v}^2}{2h}$

PARTIE P3 : Numérisation d'un signal sonore

Document P3-1 - Bits et octets

Un octet est constitué d'une séquence de huit bits.
1 ko (kilooctet) = 1 000 octets et 1 Mo (mégaoctet) = 1 000 ko.

Document P3-2 - Quelques puissances de 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048

n	12	13	14	15	16
2^n	4 096	8 192	16 384	32 768	65 536

On souhaite numériser un signal sonore d'une durée $\Delta t = 4,0$ s à l'aide d'un microphone relié à un CAN (convertisseur analogique-numérique) travaillant sur 12 bits entre -8,188 V et 8,192 V avec une fréquence d'échantillonnage $f = 50$ kHz.

Question 27 :

Le pas de quantification du CAN est compris entre :

A - 1 mV et 3 mV

B - 3 mV et 10 mV

C - 10 mV et 30 mV

D - 30 mV et 100 mV

Question 28 :

Le nombre d'échantillons mesurés par le CAN est compris entre :

A - 3 000 et 10 000

B - 10 000 et 30 000

C - 30 000 et 100 000

D - 100 000 et 300 000

Question 29 :

En absence de compression des données, la taille du signal sonore numérisé est comprise entre :

A - 200 ko et 600 ko

B - 600 ko et 2 Mo

C - 2 Mo et 6 Mo

D - 6 Mo et 20 Mo

Question 30 :

Sur un support optique de 700 Mo, on peut stocker un nombre de signaux sonores numérisés de cette manière compris entre :

A - 30 et 100

B - 100 et 300

C - 300 et 1 000

D - 1 000 et 3 000