

Épreuve 2019
Mathématiques & Physique
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2019.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 3h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

PARTIE MATHÉMATIQUES

Questions liées :

4 à 6

7 à 10

11 à 15

Notations

Les lettres \mathbb{C} , \mathbb{R} et \mathbb{N} désignent respectivement les ensembles des nombres complexes, des nombres réels et des entiers naturels. Le nombre i désigne le nombre complexe défini par $i^2 = -1$. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . $|z|$ désigne le module du nombre complexe z . L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$.

PARTIE I

Question 1 :

On désigne par (D) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $z = 1 - 2i + e^{i\theta}$, θ étant un nombre réel.

- A - (D) est une droite passant par le point d'affixe $2 - 2i$.
- B - (D) est le cercle de centre le point d'affixe $-1 + 2i$ et de rayon 1.
- C - (D) est le cercle de centre le point d'affixe $1 - 2i$ et de rayon 1.
- D - (D) est le cercle de centre le point d'affixe $1 - 2i$ et de rayon $\sqrt{3}$.

Question 2 :

On désigne par (E) l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifient $|z - 1 + i| = |z + 1 + 2i|$. Les points A , B et C ont respectivement pour affixe : $1 - i$, $-1 + 2i$ et $-1 - 2i$. Précisez la phrase qui est vraie ou les phrases qui sont vraies.

- A - C est un point de (E) .
- B - (E) est la médiatrice du segment $[AB]$.
- C - (E) est la médiatrice du segment $[AC]$.
- D - (E) est le cercle de diamètre $[AB]$.

Question 3 :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z + |z^2| = 7 + i$. Cette équation admet :

- A - Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.
- B - Une solution réelle.
- C - Deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.
- D - Une solution qui a pour partie imaginaire 2.

PARTIE II**Question 4 :**

On considère les points $A(1; 2; -1)$, $B(1; 1; 0)$, $C(9; -1; -2)$ et $S(1; 1; 1)$. Précisez la phrase qui est vraie ou les phrases qui sont vraies :

A - Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $-x - 2y - 2z + 3 = 0$.

B - Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + 2y + 2z + 3 = 0$.

C - Une équation paramétrique de la droite (AB) est :
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

D - Une équation paramétrique de la droite (AB) est :
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Question 5 :

Les coordonnées du point S' symétrique du point S par rapport au plan (ABC) sont :

A - $\left(\frac{8}{9}; \frac{7}{9}; \frac{7}{9}\right)$

B - $\left(\frac{5}{9}; \frac{1}{9}; \frac{1}{9}\right)$

C - $\left(\frac{7}{9}; \frac{5}{9}; \frac{5}{9}\right)$

D - $\left(\frac{1}{9}; \frac{5}{9}; \frac{5}{9}\right)$

Question 6 :

Le triangle ABC est :

A - Equilatéral.

B - Isocèle.

C - Rectangle en A .

D - Rectangle en C .

PARTIE III

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
 U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
 U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.
On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2 .
On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2 .
L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve \mathcal{E} .
On note B_1 (respectivement N_1) l'évènement :
« On a tiré une boule blanche (respectivement noire) dans l'urne U_1 »
et $P(B_1)$ (respectivement $P(N_1)$) les probabilités associées.
On note B_2 (respectivement N_2) l'évènement :
« On a tiré une boule blanche (respectivement noire) dans l'urne U_2 »
et $P(B_2)$ (respectivement $P(N_2)$) les probabilités associées.

Question 7 :

Le calcul de $P(B_2)$ donne :

- A - $\frac{1}{2}$
- B - $\frac{3}{4}$
- C - $\frac{3k+6}{4k+7}$
- D - $\frac{3k+6}{4k+12}$

Question 8 :

Le calcul de $P(N_2)$ donne :

- A - $\frac{1}{2}$
- B - $\frac{1}{4}$
- C - $\frac{k+1}{4k+7}$
- D - $\frac{k+18}{4k+12}$

Question 9 :

Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve \mathcal{E} .

Soit X la variable aléatoire égale à la somme relative dont il dispose à la fin de l'épreuve. Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche, il reçoit 12 euros de la banque. Sinon, il ne reçoit rien et sa mise revient à la banque. Nous avons alors :

- A - $X \in \{-8, 4\}$
- B - $X \in [-8; 4]$
- C - $X \in [-8; 12]$
- D - $X \in \{-8, 12\}$

Question 10 :

Préciser la phrase qui est vraie ou les phrases qui sont vraies :

- A** - Le jeu est favorable au joueur à partir de 7 boules blanches au total, c'est à dire en comptant les boules blanches dans les deux urnes.
- B** - Le jeu est favorable à la banque pour un maximum de 7 boules blanches au total, c'est à dire en comptant les boules blanches dans les deux urnes.
- C** - Le jeu est favorable au joueur à partir de 9 boules blanches au total, c'est à dire en comptant les boules blanches dans les deux urnes.
- D** - Le jeu est favorable à la banque pour un maximum de 5 boules blanches au total, c'est à dire en comptant les boules blanches dans les deux urnes.

PARTIE IV

Soit la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^{\pi/3} \frac{(\sin(x))^n}{\cos(x)} dx.$$

Question 11 :

Le calcul de $\int_0^{\pi/3} (\sin(x))^n \cos(x) dx$ donne :

- A** - $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
- B** - $\frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
- C** - $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$
- D** - $\frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

Question 12 :

On en déduit que :

- A** - $I_{n+2} - I_n = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
- B** - $I_{n+2} - I_n = -\frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
- C** - $I_{n+2} - I_n = -\frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$
- D** - $I_{n+2} - I_n = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

Question 13 :

On obtient alors :

A - $I_1 = -\ln(2)$, $I_3 = -\ln(2) - \frac{3}{8}$ et $I_5 = -\ln(2) - \frac{33}{64}$

B - $I_1 = \ln(2)$, $I_3 = \ln(2) - \frac{3}{8}$ et $I_5 = \ln(2) - \frac{33}{64}$

C - $I_1 = \ln(2)$, $I_3 = \ln(2) - \frac{3}{8}$ et $I_5 = \ln(2) - \frac{9}{64}$

D - $I_1 = -\ln(2)$, $I_3 = -\ln(2) - \frac{3}{4}$ et $I_5 = -\ln(2) - \frac{9}{64}$

Question 14 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ par $f(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, nous avons :

A - $f'(x) = -\frac{2}{\cos(x)}$

B - $f'(x) = \frac{2}{\cos(x)}$

C - $f'(x) = -\frac{1}{\cos(x)}$

D - $f'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

Question 15 :

Nous admettons que pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$. On obtient alors :

A - $I_0 = \ln(2 + 2\sqrt{3})$, $I_2 = \ln(2 + 2\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $I_4 = \ln(2 + 2\sqrt{3}) - \frac{5\sqrt{3}}{8}$

B - $I_0 = \ln(2 + \sqrt{3})$, $I_2 = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $I_4 = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{3\sqrt{3}}{4}$

C - $I_0 = \ln(2 + \sqrt{3})$, $I_2 = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $I_4 = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{5\sqrt{3}}{8}$

D - $I_0 = \ln(2 + \sqrt{3})$, $I_2 = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}$ et $I_4 = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{3\sqrt{3}}{8}$

PARTIE PHYSIQUE

Questions liées :

16 et 17

18 à 24

25 et 26

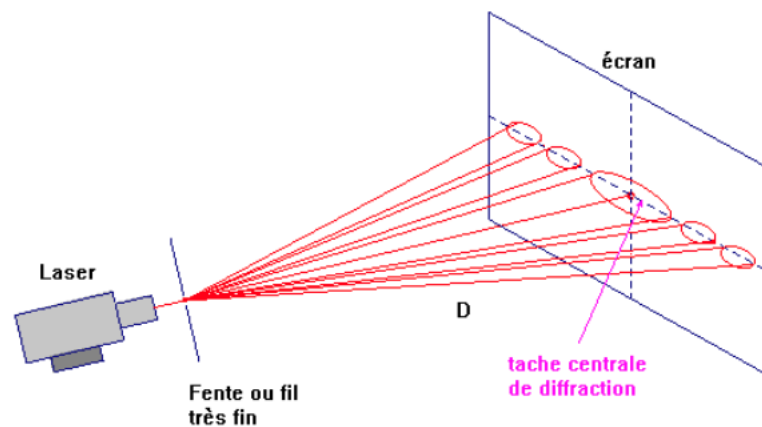
27 à 30

Partie P1 (questions 16 à 24) - Dualité onde-particule

Document P1-1

Diffraction d'un faisceau laser par une fente ou un fil très fin

On place une fente ou un fil très fin verticalement, à une distance \bar{D} d'un écran vertical. On éclaire cette fente ou ce fil à l'aide d'un laser et on observe alors sur l'écran la figure de diffraction suivante :



(D'après <http://guy.chaumeton.pagesperso-orange.fr/2dtp02phc.htm>)

Document P1-2

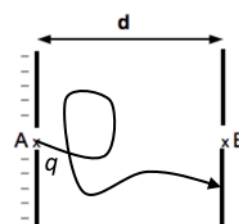
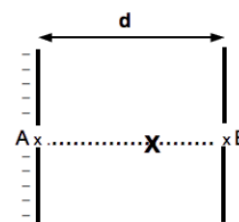
Principe du canon à électrons

Un canon à électrons (voir figure ci contre) est un condensateur plan. Il est constitué de deux plaques conductrice planes parallèles (les armatures), distantes de d , entre lesquelles, grâce à un générateur de tension continue, on applique une tension électrique U en volt (V), de manière à ce que l'armature au niveau du point A soit chargée négativement.

Les électrons partent de A avec une vitesse quasi nulle, puis ils sont accélérés par la force électrostatique et sont ensuite éjectés en B avec une vitesse \vec{v} perpendiculaire aux armatures (vecteur vitesse qui restera constant en dehors du canon).

Le poids des électrons est négligeable devant la force électrostatique.

D'un point de vue énergétique, pour une particule ponctuelle de charge électrique q qui part du point A et rejoint l'autre armature en suivant une trajectoire absolument quelconque (deuxième figure ci-contre), le travail de la force électrostatique est $W = -q \times U$.



(D'après [https ://carnetsdescience.xyz/puissance11-2013-canon-a-electrons.html](https://carnetsdescience.xyz/puissance11-2013-canon-a-electrons.html))

Document P1-3 - Petits angles

Pour un angle θ suffisamment petit, sa valeur en radian vérifie : $\tan(\theta) \simeq \theta$.

Document P1-4 - Calcul d'incertitudes

Soit trois grandeurs, x , y et z . Si la relation entre ces trois grandeurs est de la forme $z = a \times \frac{y}{x}$, a étant un facteur constant, les incertitudes correspondantes vérifient :

$$\left(\frac{U(z)}{z}\right)^2 = \left(\frac{U(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{U(y)}{y}\right)^2$$

Données :

- Masse de l'électron : $m_e \simeq 9,1 \times 10^{-31}$ kg
- Charge élémentaire : $e \simeq 1,6 \times 10^{-19}$ C
- Constante de Planck : $h \simeq 6,6 \times 10^{-34}$ J.s

À l'aide d'un canon à électrons, on envoie sur un fil de largeur $a = 0,10 \mu\text{m}$ un faisceau d'électrons. On observe alors sur un détecteur situé dans un plan à la distance de $(1,000 \pm 0,001)$ m du fil une figure de diffraction dont la largeur de la tâche centrale est $(1,4 \pm 0,1)$ cm.

Question 16 :

Si on note λ la longueur d'onde associée aux électrons du faisceau, cette longueur d'onde vérifie :

$$\mathbf{A} - \frac{\lambda}{a} = (7,00 \pm 0,06) \times 10^{-3}$$

$$\mathbf{B} - \frac{\lambda}{a} = (7,0 \pm 0,6) \times 10^{-3}$$

$$\mathbf{C} - \frac{\lambda}{a} = (1,40 \pm 0,02) \times 10^{-2}$$

$$\mathbf{D} - \frac{\lambda}{a} = (1,4 \pm 0,2) \times 10^{-2}$$

Question 17 :

En considérant que les électrons ne sont pas relativistes, la valeur de leur vitesse vérifie :

$$\mathbf{A} - v = \frac{h}{m_e \times \lambda}$$

$$\mathbf{B} - v = \frac{\lambda}{m_e \times h}$$

$$\mathbf{C} - v = \sqrt{\frac{2 \times h}{m_e \times \lambda}}$$

$$\mathbf{D} - v = \sqrt{\frac{2 \times \lambda}{m_e \times h}}$$

Le calcul de la vitesse donne $v \simeq 1,0 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1}$.

Question 18 :

La tension électrique au niveau du canon à électrons vérifie :

$$\mathbf{A} - U = \frac{m_e \times v}{e}$$

$$\mathbf{B} - U = e \times m_e \times v$$

$$\mathbf{C} - U = \frac{m_e \times v^2}{2 \times e}$$

$$\mathbf{D} - U = \frac{e \times m_e \times v^2}{2}$$

Question 19 :

Cette tension est donc comprise entre :

$$\mathbf{A} - 10 \text{ V et } 100 \text{ V}$$

$$\mathbf{B} - 100 \text{ V et } 1 \text{ kV}$$

$$\mathbf{C} - 1 \text{ kV et } 10 \text{ kV}$$

$$\mathbf{D} - 10 \text{ kV et } 100 \text{ kV}$$

Question 20 :

La distance d entre les armatures du condensateur dans le canon à électrons étant $d = 1,0 \text{ cm}$, l'expression de la valeur de la force électrostatique subie par un électron est :

$$\mathbf{A} - F = e \times d \times U$$

$$\mathbf{B} - F = \frac{e \times U}{d}$$

$$\mathbf{C} - F = \frac{d \times U}{e}$$

$$\mathbf{D} - F = \frac{U}{e \times d}$$

Question 21 :

Cette valeur est comprise entre :

- A - 10^{-17} N et 10^{-16} N
- B - 10^{-16} N et 10^{-15} N
- C - 10^{-15} N et 10^{-14} N
- D - 10^{-14} N et 10^{-13} N

Question 22 :

La valeur du champ électrostatique dans le canon est comprise entre :

- A - 1 V.m^{-1} et 10 V.m^{-1}
- B - 10 V.m^{-1} et 100 V.m^{-1}
- C - 100 V.m^{-1} et 1 kV.m^{-1}
- D - 1 kV.m^{-1} et 10 kV.m^{-1}

Question 23 :

Pour passer de l'armature A à l'armature B , un électron met une durée Δt dont l'expression vérifie :

- A - $\Delta t = \frac{U}{e}$
- B - $\Delta t = \frac{U}{m_e}$
- C - $\Delta t = \frac{d}{v}$
- D - $\Delta t = \frac{2d}{v}$

Question 24 :

La valeur de cette durée est comprise entre :

- A - 10 ns et 100 ns
- B - 100 ns et $1 \mu\text{s}$
- C - $1 \mu\text{s}$ et $10 \mu\text{s}$
- D - $10 \mu\text{s}$ et $100 \mu\text{s}$

Partie P2 (questions 25 et 26) - Ondes

Une onde à la surface de l'eau a une fréquence $f = 12,0$ Hz et une longueur d'onde $\lambda = 4,40$ mm.

Question 25 :

Sa période est comprise entre :

- A - $1 \mu\text{s}$ et $10 \mu\text{s}$
- B - $10 \mu\text{s}$ et $100 \mu\text{s}$
- C - $100 \mu\text{s}$ et 1 ms
- D - 1 ms et 10 ms

Question 26 :

La célérité de propagation de cette onde est comprise entre :

- A - 1 mm.s^{-1} et 10 cm.s^{-1}
- B - 10 cm.s^{-1} et 1 m.s^{-1}
- C - 1 m.s^{-1} et 10 m.s^{-1}
- D - 10 m.s^{-1} et 1 km.s^{-1}

Partie P3 (questions 27 à 30) - Transferts thermiques**Données :**

- Intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre : 10 m.s^{-2} .
- Une énergie de 1 W.h est égale à une puissance de 1 W multipliée par une durée de 1 h .
- La performance énergétique d'un logement correspond à l'énergie perdue par ce logement à cause des transferts thermiques vers l'extérieur.

Question 27 :

La chaleur délivrée par un radiateur de $2,0 \text{ kW}$ pendant un quart d'heure est comprise entre :

- A - 100 W.h et 1 kW.h
- B - 1 kW.h et 10 kW.h
- C - 100 kJ et 1 MJ
- D - 1 MJ et 10 MJ

Question 28 :

Ce radiateur est placé dans une pièce de 25 m^2 , qui fait elle-même partie d'un logement dont la performance énergétique est de 80 kW.h par année et par mètre carré. Ce radiateur fonctionne 200 jours par an. La durée pendant laquelle il devra fonctionner chaque jour est en moyenne comprise entre :

- A - 1h et 6h
- B - 6h et 12h
- C - 12h et 18h
- D - 18h et 24h

Question 29 :

Ce radiateur est un radiateur à bain d'huile qui contient 10 L d'huile. Cette huile est initialement à une température de 45 °C . On éteint le radiateur et la température de l'huile redescend jusqu'à 15 °C . La capacité thermique de l'huile est de $2,0 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et sa densité de $0,80$. L'énergie thermique transférée par le radiateur à la pièce est comprise entre :

- A - 100 J et 1 kJ
- B - 1 kJ et 10 kJ
- C - 10 kJ et 100 kJ
- D - 100 kJ et 1 MJ

Question 30 :

Pour fournir une telle énergie à l'aide d'une centrale hydraulique, la masse d'eau qui devrait chuter d'une hauteur de 100 m devrait être comprise entre :

- A** - 100 kg et 1 tonne
- B** - 1 tonne et 10 tonnes
- C** - 10 tonnes et 100 tonnes
- D** - 100 tonnes et 1000 tonnes