Épreuve 2019
Mathématiques
(concours ENAC EPL/S)

Solutions proposés par : Angèle Niclas*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de Mathématiques du concours EPL/S 2019. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat du travail d'Angèle uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Co-autrice de l'ouvrage : Annales corrigées du concours EPL/S.

Corrigé 2019

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	D	C	B	B	B	D	E	A	A	C

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
B	D	A	C	D	E	AB	C	D	A	E	B

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
BC	E	A	D	A	C	B	D	C	B	D	A

Question 1 : C
Le polynôme $X-1$ est dans $\mathbb{Z}[X]$ et admet comme racine 1 donc la réponse A est fausse. De même, X^2+1 admet comme racine $\pm i$ donc la réponse B est fausse. En considérant le polynôme $2X-1$ qui a pour racine $\frac{1}{2}$, on voit que $p=1$ et $q=2$, donc $qXa_0=-1$ et la réponse D est fausse. Enfin, si $\frac{p}{q}$ est racine de P alors :

$$a_0 + a_1\frac{p}{q} + ... + a_n\frac{p^n}{qn} = 0$$

$$\Leftrightarrow q^n a_0 + a_1 p q^{n-1} + a_2 p^2 q^{n-2} + ... + a_n p^n = 0$$

En particulier :

$$a_n p^n = -q\left(a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_0 q^{n-1}\right)$$

Comme $q|a_n p^n$ et p et q sont premiers entre eux, $q|a_n$. De même :

$$a_0 q^n = -p\left(a_1 q^{n-1} + ... + a_n p^{n-1}\right)$$

Donc $p|a_0 q^n$ et p et q sont premiers entre eux donc $p|a_0$ et la réponse C est juste.

Question 2 : A
D'après la question 1, les racines rationnelles sont de la forme $\frac{p}{q}$ où $p|a_0$ et $q|a_n$. Ainsi, il suffit de chercher les diviseurs p_i de a_0 et q_j de a_n pour avoir les racines rationnelles possibles de P. En revanche, il faut bien prendre p et q rationnels pour avoir les racines négatives. Ainsi, la réponse A est juste et B est fausse. Par ailleurs, il est possible de localiser les racines réelles de P en étudiant les variations de la fonction et en cherchant ses zéros. En revanche, cela ne donnera pas le nombre de racines car il reste les racines complexes. Ainsi, les réponses C et D sont fausses.

Question 3 : D
Comme montré en question 2, les rationnels solutions de $Q(X)=0$ s'écrivent $\frac{p}{q}$ où $p|4$ et $q|6$. Ainsi, $p \in \{-4,-2,-1,1,2,4\}$ et $q \in \{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$. Comme p et q sont premiers, on a alors :

$$\frac{p}{q} \in \left\{-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1, -2, 2, -4, 4, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right\}$$

Il y a 16 rationnels et 10 rationnels non entiers donc seule la réponse D est correcte.

Question 4 : C
En suivant la même méthode qu'en question 3, $p|-14$ et $q|78$, donc
$p \in \{-14,-7,-2,-1,1,2,7,14\}$ et $q \in \{\pm 78, \pm 39, \pm 26, \pm 13, \pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}$.

Rappelons que p et q sont premiers entre eux.

$$\begin{aligned}
&\to \text{Si } q = \pm 78,\ p \in \{\pm 7, \pm 1\} \Rightarrow 2 \text{ choix positifs}\\
&\to \text{Si } q = \pm 39,\ p \in \{\pm 14, \pm 7, \pm 2, \pm 1\} \Rightarrow 4 \text{ choix positifs}\\
&\to \text{Si } q = \pm 26,\ p \in \{\pm 7, \pm 1\} \Rightarrow 2 \text{ choix positifs}\\
&\to \text{Si } q = \pm 13,\ p \in \{\pm 14, \pm 7, \pm 2, \pm 1\} \Rightarrow 4 \text{ choix positifs}\\
&\to \text{Si } q = \pm 6,\ p \in \{\pm 7, \pm 1\} \Rightarrow 2 \text{ choix positifs}\\
&\to \text{Si } q = \pm 3,\ p \in \{\pm 14, \pm 7, \pm 2, \pm 1\} \Rightarrow 4 \text{ choix positifs}\\
&\to \text{Si } q = \pm 2,\ p \in \{\pm 7, \pm 1\} \Rightarrow 2 \text{ choix positifs}\\
&\to \text{Si } q = \pm 1,\ \text{ on a pas de rationnels non entiers}
\end{aligned}$$

Ainsi, il y a 20 rationnels positifs non entiers possibles et seule la réponse C est juste.

Question 5 : B
D'après la question précédente, si $S\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$ alors $p|1$ et $q|1$, donc $\dfrac{p}{q} \in \{\pm 1\}$. Or, $S(1) = 1 - 3 + 1 = -1$ et $S(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$ donc il n'y a pas de racines rationnelles, et seule la réponse B est juste.

Question 6 : B
Si on note f la fonction associée, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. On a les variations suivantes :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Par théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule une fois sur $]-\infty; -1]$, puis sur $]-1; 1]$ puis sur $]1; +\infty[$ donc il y a 3 racines réelles et seule la réponse B est juste.

Question 7 : B
Si $c = 0$, on a :

$$u_{n+1} = \frac{a}{d} u_n + \frac{b}{d}$$

Ce qui est la définition d'une suite arithmético-géométrique. Comme a et b peuvent être non nuls, les réponses A, C et D sont fausses et seule la B est juste.

Question 8 : D
En prenant $a = d = c = b = 1$, on voit que :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 1} = 1$$

Ce qui est une suite constante, bien définie et de limite 1. Donc les réponses A et B sont fausses. Si $ad - bc = 0$, alors :

$$b = \frac{ad}{c} \Rightarrow f(x) = \frac{ax + \frac{ad}{c}}{cx + d} = \frac{a}{c} \times \frac{x + \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1. Mais si $u_0 \neq \dfrac{a}{c}$, elle n'est pas constante partout, donc la réponse C est fausse. En revanche, $u_n = \dfrac{a}{c}$ si $n \geqslant 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{a}{c}$ et la réponse D est juste.

Question 9 : E
Il y a un problème de définition si $cu_0 + d = 0$, donc si $u_0 = -\dfrac{d}{c}$. Ainsi, la réponse D est fausse.

Par ailleurs, on peut très bien prendre $u_0 = -\dfrac{d}{c} \neq \dfrac{a}{c}$ et avoir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non définie. Par exemple, $a = 0$, $b = c = d = 1$ et $u_0 = -1$, alors u_1 n'est pas défini et on respecte bien les conditions $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$. Donc la réponse C est fausse.

En reprenant les conditions qui nous ont permis d'éliminer la réponse C on constate qu'avec $u_0 \neq 0$ il est possible que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas définie. Donc la réponse A est également fausse.

Enfin, si $a = c = 1$, $b = -1$ et $d = 0$, avec $u_0 = 1$ alors $u_1 = 0$ et u_2 n'est pas défini. On a toujours bien $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$. Ainsi B est fausse.

Conclusion, aucune des réponses proposée n'est juste.

Question 10 : A
Soit x un point fixe, $f(x) = x$ donc :

$$\begin{aligned}\frac{ax+b}{cx+d} = x &\Rightarrow ax + b = cx^2 + dx\\ &\Rightarrow cx^2 + (d-a)x - b = 0\end{aligned}$$

Le discriminant vaut $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$. Ainsi, il y a au maximum 2 racines, et la réponse A est juste. En prenant $d = a = 0$ et $b = c = 1$, on a $\Delta = 4$, et deux racines distinctes :

$$x_1 = 1 \text{ et } x_2 = -1$$

Ainsi, les réponses B et D sont fausses.
En prenant $b = -1$, $c = a = 1$ et $d = 3$, $\Delta = 0$ et il y a une unique racine $x = 1$. Ainsi, la réponse C est fausse.

Question 11 : A
α et β sont racines de $cx^2 + (d-a)x - b = 0$ qui se réécrit $b = cx^2 + (d-a)x$. Ainsi, seule la réponse A est juste car $c \neq 0$, et il y a des cas où $a \neq d$.

Question 12 : C
Si $u_0 = \alpha$ ou $u_0 = \beta$, comme $f(\alpha) = \alpha$ et $f(\beta) = \beta$ on est sur un point fixe et les suites sont constantes. Les racines pouvant être non nulles, seule la réponse C est juste.

Question 13 : B
Le premier terme de la suite est $\dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$ donc les réponses A, C et D sont fausses.
Calculons ensuite :

$$\frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta}=\frac{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}-\alpha}{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}-\beta}$$

$$=\frac{au_n+b-\alpha u_n-\alpha d}{au_n+b-c\beta u_n-\beta d}$$

$$=\frac{(a-\alpha c)u_n+b-\alpha d}{(a-\beta c)u_n+b-\beta d}$$

Comme prouvé en question 11, $b=c\alpha^2+(d-a)\alpha$ donc $b-\alpha d=c\alpha^2-a\alpha=\alpha(c\alpha-a)$. Mais on a aussi $b=c\beta^2+(d-a)\beta$ donc $b-\beta d=c\beta^2-a\beta=\beta(c\beta-a)$. Ainsi :

$$\frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta}=\frac{(a-\alpha c)(u_n-\alpha)}{(a-\beta c)(u_n-\beta)}$$

On reconnait une suite géométrique de raison $\dfrac{a-\alpha c}{a-\beta c}$ donc la réponse B est juste.

Question 14 : D
On a $\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}=k^nc$ où $c=\dfrac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$, d'où, si $1-k^nc\neq 0$, $u_n=\dfrac{-k^nc\beta+\alpha}{1-k^nc}$.

Si $|k|<1$, à partir d'un certain rang $1-k^nc\neq 0$ et $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{\alpha}{1}=\alpha$.

Si $|k|>1$, on a de même $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{c\beta}{c}=\beta$.

Si $k=-1$, $u_n=\dfrac{-(-1)^nc\beta+\alpha}{1-(-1)^nc}$. La suite prend donc deux valeurs selon la parité de n. Ces deux valeurs ne sont pas à priori égales donc elle diverge.

Enfin, si $k=1$, $\alpha c=\beta c$ donc $\alpha=\beta$ comme $c\neq 0$. Mais $\alpha\neq\beta$ donc ce cas est exclu. Ainsi, seule la réponse D est juste.

Question 15 : A
Calculons :

$$\frac{1}{u_{n+1}-\alpha}-\frac{1}{u_n-\alpha}=\frac{1}{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}-\alpha}-\frac{1}{u_n-\alpha}$$

$$=\frac{cu_n+d}{au_n+b-\alpha cu_n-\alpha d}-\frac{1}{u_n-\alpha}$$

$$=\frac{cu_n^2+(d-a)u_n-b}{(a-\alpha c)u_n^2+(-a\alpha+\alpha^2c+b-\alpha d)\,u_n-\alpha b+\alpha^2 d}$$

Comme α est racine double , $\alpha=\dfrac{a-d}{2c}$ et $d-a=-2\alpha c$.
De plus, $b-\alpha d=c\alpha^2-a\alpha$ donc :

$$-a\alpha+\alpha^2c+b-\alpha d=2\left(c\alpha^2-\alpha a\right)=-2\alpha(a-\alpha c)$$

Enfin, $b - \alpha d = c\alpha^2 - a\alpha$ donc :

$$-\alpha b + \alpha^2 d = \alpha^2(a - \alpha c)$$

Et :

$$b = c\alpha^2 + (d-a)\alpha = c\alpha^2 - 2\alpha^2 c = -c\alpha^2$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_{n+1} - \alpha} - \frac{1}{u_n - \alpha} &= \frac{cu_n^2 - 2\alpha c u_n + c\alpha^2}{(a-\alpha c)u_n^2 - 2\alpha(a - \alpha c)u_n + \alpha^2(a - \alpha c)} \\ &= \frac{c\left(u_n^2 - 2\alpha u_n + \alpha^2\right)}{(a - \alpha c)\left(u_n^2 - 2\alpha u_n + \alpha^2\right)} \\ &= \frac{c}{a - \alpha c}\end{aligned}$$

Conclusion, la suite de terme général $\dfrac{1}{u_n - \alpha}$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{c}{a - \alpha c}$ et seule la réponse A est juste.

Question 16 : C
$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{u_n - \alpha} = nk' + \frac{1}{u_0 - \alpha}$$

En particulier :

$$u_n = \alpha + \frac{1}{nk' + \dfrac{1}{u_0 - \alpha}}$$

si le dénominateur est non nul. Si n est grand, c'est le cas et $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$. A priori, $\alpha \neq 0$ donc seule la réponse C est juste.

Question 17 : D
Par l'absurde, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite finie l alors par passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on a $l = f(l)$. Mais f n'a pas de point fixe donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite finie, la réponse D est juste et A, C sont fausses. Si on considère $a = d = 0$ et $b = 1$, $c = -1$ alors d'après l'étude de la question 10, $\Delta = -4$ et il n'y a pas de point fixe. On a alors la suite $u_{n+1} = -\dfrac{1}{u_n}$, qui alterne entre la valeur de u_0 et $-\dfrac{1}{u_0}$. En particulier, elle ne tend pas vers $+\infty$ et la réponse B est fausse.

Question 18 : E

$$M = a\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C}$$

Ainsi, aucune des réponses n'est correcte.

Question 19 : A et B
On a vu en question précédente que :

$$E = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)$$

On remarque que cette famille est libre car échelonnée, donc c'est une base et la réponse A est juste. Par ailleurs, on remarque qu'en réponse B, toutes les matrices ont été multipliées par 2 donc la famille reste une base et la réponse B est juste également. Dans la réponse C, $P = -Q - R$ donc ce n'est pas une base et la réponse est fausse. De même, dans la réponse D, $P = -Q - R$ et la réponse est fausse.

Question 20 : C
En supposant que A, B, C, sont les mêmes que P, Q, R de la question précédente, on calcule $A^2 = A$, $B^2 = B$, $C^2 = C$, $AB = BC = AC = BA = CA = CB = 0$. Ainsi, seule la réponse C est juste.

Question 21 : D
$M(a, b, c) = aA + bB + cC$ et $M(a', b', c') = a'A + b'B + c'C$. D'où :

$$\begin{aligned}
M(a, b, c) \times M(a', b', c') &= (aA + bB + cC)\,(a'A + b'B + c'C)\\
&= aa'A^2 + \cancel{ab'AB} + \cancel{ac'AC} + \cancel{ba'BA} + bb'B^2 + \cancel{bc'BC} + \cancel{ca'CA} + \cancel{cb'CB} + cc'C^2\\
&= aa'A + bb'B + cc'C\\
&= M(aa', bb', cc')
\end{aligned}$$

Seule la réponse D est correcte.

Question 22 : A
E est un espace vectoriel donc $M(a, b, c) - M(a', b', c')$ appartient à E $\forall a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$. Ainsi, les réponses B et D sont fausses. Par ailleurs, $M(aa', bb', cc') = M(a'a, b'b, c'c)$ donc $M(a, b, c)M(a', b', c') = M(a', b', c')M(a, b, c)$ et seule la réponse A est correcte.

Question 23 : E
Calculons la probabilité de tirer deux boules rouges. Le tirage étant simultané, il y a donc $\binom{n}{2}$ choix sur le total de $\binom{15}{2}$ tirages possibles, donc une probabilité de :

$$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{15 \times 14}{2}} = \frac{n(n-1)}{210}$$

En faisant de même pour les boules noires et blanches :

$$g(n, b, r) = \frac{1}{210}\left[n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)\right]$$

Ainsi toutes les réponses sont fausses.

Question 24 : B
On remarque en testant les coordonnées de N, B, et R dans les équations que N, B, et R n'appartiennent qu'au plan de l'équation B. Comme ces points sont distincts non alignés et

qu'il existe un unique plan passant par 3 points distincts non alignés, le plan proposé en B est celui de (NBR) et seule la réponse B est juste.

Question 25 : B et C
Par définition, $n + b + r = 15$ donc $(n, b, r) \in (NBR)$ et la réponse C est juste et A est fausse. Par ailleurs :

$$OM^2 - 15 = n^2 + b^2 + r^2 - 15$$

Et :

$$\begin{aligned} n(n-1) + b(b-1) + r(r-1) &= n^2 + b^2 + r^2 - n - b - r \\ &= n^2 + b^2 + r^2 - 15 \\ &= OM^2 - 15 \end{aligned}$$

Donc la réponse B est juste et D fausse.

Question 26 : E
Aucun des points proposés n'appartient à (NBR) comme la somme ne fait pas 15. Donc aucune réponse n'est juste.

Question 27 : A
La probabilité g est minimale quand OM^2 est minimale avec $M \in (NBR)$. Ainsi, M doit être le projeté orthogonal de O sur le plan (NBR). Comme la normale du plan est $(1, 1, 1)$, on a $OM = \alpha(1, 1, 1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Et comme $M \in (NBR)$, $\alpha + \alpha + \alpha = 15$ donc $\alpha = 5$. Ainsi :

$$OM^2 = 5^2 + 5^2 + 5^2 = 75$$

Et :

$$g(n, b, r) = \frac{75 - 15}{210} = \frac{60}{210} = \frac{2}{7}$$

Seule la réponse A est juste.

Question 28 : D
X a deux valeurs possibles $x(k - 1)$ si le joueur gagne et $-x$ s'il perd, et :

$$\mathrm{P}(X = x(k-1)) = \mathrm{P}(G) = \frac{2}{7} \text{ et } \mathrm{P}(X = -x) = 1 - \mathrm{P}(G) = \frac{5}{7}$$

Ainsi, l'espérance vaut :

$$E(X) = x(k-1) \times \frac{2}{7} + \frac{5}{7} \times (-x) = x\left(\frac{2}{7}k - 1\right)$$

Le jeu est équitable si l'espérance est nulle, donc si $\frac{2}{7}k - 1 = 0$, c'est à dire $k = \frac{7}{2}$. Seule la réponse D est juste.

Question 29 : A
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -n^2 \sin(x) \left(\cos(x)\right)^{n-1} \sin(x) + n(\cos(x))^n \cos(x) \\ &= n \underbrace{(\cos(x))^{n-1}}_{\geqslant 0} \left[\cos^2(x) - n \sin^2(x)\right] \end{aligned}$$

Et :

$$\cos^2(x) = n\sin^2(x) \Leftrightarrow \tan(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \left(\text{car } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

Comme on cherche $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a alors f_n' s'annule en $x = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et les variations :

x	0		$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$		$\frac{\pi}{2}$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Ainsi, la fonction admet un maximum en un unique point $x_n = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et seule la réponse A est juste.

Question 30 : C
Si $n \to +\infty$ alors $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En utilisant le fait que $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, alors :

$$x_n = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Et seule la réponse C est juste.

Question 31 : B
Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x_n) = n\left(\cos(x_n)\right)^n \sin(x_n)$$

On a $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc :

$$\sin\left(x_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Par ailleurs :

$$\left(\cos(x_n)\right)^n = e^{n\ln(\cos(x_n))}$$

On a :

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \cos(x_n) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\cos(x_n)\right) = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow e^{n\ln(\cos(x_n))} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Donc $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{e}}$ et seule la réponse B est correcte.

Question 32 : D
On a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^3\right)$$

Donc si F est une primitive on a :

$$F(t) = \text{cste} + t - \frac{1}{6}t^3 + \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^4\right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= F\left(x^2\right) - F(x) \\ &= x^2 - \frac{1}{6}x^6 - x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^4\right) \\ &= -x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

Seule la réponse D est juste.

Question 33 : C
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;1]$, $t^{n+1} \leqslant t^n$ donc comme $\cos(t)$ et $\sin(t) \geqslant 0$, on a $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$ et $0 \leqslant y_{n+1} \leqslant y_n$. Les suites sont donc décroissantes et minorées, la réponse A est fausse. La réponse B est fausse également, car les suites sont décroissantes et minorées par 0, donc elles converges vers des limites $l_1 \geqslant 0$ et $l_2 \geqslant 0$. Mais pour prouver que $l_2 = l_1 = 0$, il faut impérativement trouver des encadrements de x_n et y_n.

De plus :

$$\begin{aligned} |z_n| &= \left|\int_0^1 t^n e^{it}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^1 t^n \left|e^{it}\right|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = 0$, et comme $|x_n|$, $|y_n| \leqslant |z_n|$, on a $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Inversement, si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = 0$ et la réponse C est juste.

On a aussi $0 \leqslant x_n \leqslant |z_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et de même $0 \leqslant y_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. Par ailleurs, on a montré que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étaient décroissantes et minorées en début de démonstration. Ainsi $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Néanmoins, l'énoncé est ambiguë puisqu'il indique "si et seulement si", ce qui n'est pas pertinent puisque l'on connaît déjà l'expression des suites. Or, si on se place dans le cas général, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ n'implique pas la proposition D, d'un pur point de vue logique. Conclusion, D sera considéré fausse.

Question 34 : B
On a :

$$x_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} \cos(t) \, \mathrm{d}t$$

On intègre par partie en intégrant $\{\cos : t \mapsto \cos(t)\}$ et en dérivant $\{u : t \mapsto t^{n+1}\}$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \Big[\sin(t)t^{n+1}\Big]_0^1 - \int_0^1 \sin(t)t^n \times (n+1) \, \mathrm{d}t \\ &= \sin(1) - (n+1) \int_0^1 \sin(t)t^n \, \mathrm{d}t \\ &= \sin(1) - (n+1)y_n \end{aligned}$$

Seule la réponse B est juste.

Question 35 : D
On intègre par partie en intégrant $\{\sin : t \mapsto \sin(t)\}$ et en dérivant $\{u : t \mapsto t^{n+1}\}$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \Big[-t^{n+1}\cos(t)\Big]_0^1 + \int_0^1 \cos(t)t^n \times (n+1) \, \mathrm{d}t \\ &= -\cos(1) + (n+1)x_n \end{aligned}$$

Seule la réponse D est correcte.

Question 36 : A
On a $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$. En prenant la limite :

$$ny_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(1)$$

De même, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$. À la limite :

$$nx_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \cos(1)$$

Seule la réponse A est juste.