Épreuve 2020
Mathématiques
(concours ENAC EPL/S)

Solutions proposés par : Angèle Niclas*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de Mathématiques du concours EPL/S 2020. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat du travail d'Angèle uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Co-autrice de l'ouvrage : Annales corrigées du concours EPL/S.

Corrigé 2020

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
BC	E	BD	B	A	C	E	C	D	B	C	A

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
CD	C	AC	B	D	B	BC	D	C	E	CD	B

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
D	B	C	AD	B	D	D	AD	C	E	C	B

Question 1 : B et C
L'équation caractéristique associée à la relation $u_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$ est $x^2 - \alpha x - \alpha = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = \alpha^2 + 4\alpha = \alpha(\alpha + 4)$. L'ensemble E_α contient deux suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $r < s$ si et seulement si r et s sont deux racines de l'équation caractéristique. Ainsi, Δ doit être strictement positif, ce qui se produit quand $\alpha \in]-\infty; -4[\cup]0; +\infty[$. Comme 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, r et s sont non nuls et les réponses B et C sont les seules exactes.

Question 2 : E
Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$x_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$$

Et

$$x_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2}$$

On remarque que $x_1 > x_2$ donc $x_1 = s$ et $x_2 = r$. Si $\alpha = -5$:

$$r = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2},\ s = \frac{-5 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } |r| > |s|$$

Si $\alpha = 1$:

$$r = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},\ s = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } |s| > |r|$$

Ainsi, aucune réponse n'est correcte.

Question 3 : B et D
Les réels r et s sont solutions de l'équation :

$$x^2 - (-\alpha)x - (-\alpha) = 0$$

Donc les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $E_{-\alpha}$ en utilisant l'analyse de la question 1. Ainsi, toute combinaison linéaire de (r^n) et (s^n) est dans $E_{-\alpha}$ et la réponse B est correcte. Réciproquement, toute solution de $E_{-\alpha}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc la réponse D est juste.
De plus, on a prouvé en question 1 que E_α ne contient pas de suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\alpha \in]-4; 0[$ donc les réponses A et C sont fausses.

Question 4 : B
Si $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$, alors $\sqrt{\alpha(\alpha+4)} > 2 > \alpha$ donc :

$$|r| = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha+4)} - \alpha}{2} < \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+4\right)}}{2} = \frac{3}{4} < 1$$

Et :

$$|s| = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2} < \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+4\right)}}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

Toute suite (u_n) de E_α s'écrit :

$$u_n = ar^n + bs^n \text{ avec } a,\ b \in \mathbb{R}$$

Comme $|r|$, $|s| < 1$, alors $r^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $s^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Seule la réponse B est juste.

Question 5 : A
On a montré que $u_n = ar^n + bs^n$ avec $a,\ b \in \mathbb{R}$. En utilisant les conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = a+b \\ u_1 = ar+bs \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} ru_0 - u_1 = rb - bs \\ su_0 - u_1 = sa - ar \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} b = \dfrac{u_1 - ru_0}{s-r} \\ a = \dfrac{su_0 - u_1}{s-r} \end{array}\right.$$

Ainsi, seule la réponse A est correcte.

Question 6 : C
Si $u_1 - ru_0 \neq 0$, comme $|s| > |r|$ on a :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{u_1 - ru_0}{s-r} s^n$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, u_n ne s'annule pas. De plus :

$$\begin{aligned} \ln(|u_n|) &= \ln\left(\frac{|u_1 - ru_0|}{s-r}|s|^n + \underset{n\to\infty}{o}(|s|^n)\right) \\ &= n\ln|s| + \ln\left(\frac{|u_1 - ru_0|}{s-r} + \underset{n\to\infty}{o}(1)\right) \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(|u_n|)}{n} = \ln|s| \end{aligned}$$

Ainsi, la réponse C est juste, la D est fausse. Par ailleurs, si $u_1 - ru_0 \neq 0$ et $u_0 s - u_1 \neq 0$ alors le même raisonnement s'applique et la réponse B est fausse. Et si $u_0 s - u_1 \neq 0$ et $u_1 - ru_0 = 0$ alors $u_n = \frac{u_0 s - u_1}{s-r} r^n$ et :

$$\ln(|u_n|) = \ln\left(\frac{|u_0 s - u_1|}{s-r}|r|^n\right) = n\ln|r| + \ln\left(\frac{|u_0 s - u_1|}{s-r}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(|u_n|)}{n} = \ln|r|$$

Conclusion la réponse A est fausse.

Question 7 : E
En utilisant la question 6, on remarque que si $u_0 s - u_1 = 0$ et $u_1 - ru_0 \neq 0$ alors à partir d'un certain rang, u_n garde un signe constant et ne s'annule pas, donc les réponses A et B sont fausses. Si $u_1 - u_0 r = 0$, alors $u_n = \dfrac{su_0 - u_1}{s-r} r^n$
Mais si en plus $su_0 - u_1 = 0$, alors la suite est nulle et donc on ne peut pas écrire $\ln(|u_n|)$.
Conclusion, les réponses C et D sont fausses également.

Question 8 : C
Remarquons que :

$$|s| = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4)}}{2} > \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + 4\right)}}{2} = 1$$

$$|r| = \frac{\sqrt{\alpha(\alpha+4)} - \alpha}{2} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha} - \alpha}{2} < \frac{\sqrt{(\alpha+2)^2} - \alpha}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Ainsi, si $u_0 - u_1 r \neq 0$, on a $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{u_0 - u_1 r}{s-r} s^n$.

Comme $|s| > 1$, $|u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et la suite n'est pas bornée donc les réponses A et B sont fausses. Ainsi, $u_0 - u_1 r = 0$ si les suites sont bornées, et $u_n = \dfrac{su_0 - u_1}{s-r} r^n$.

Comme $|r| < 1$, $|u_n|$ est bornée et seule la réponse C est juste.

Question 9 : D
La fonction arccos est définie sur l'intervalle $[-1;1]$ à valeurs dans $[0;\pi]$ donc α doit appartenir à $[-1;1]$. Seule la réponse D est juste.

Question 10 : B
La fonction arccos est à valeurs dans $[0;\pi]$ donc α doit appartenir à $[0;\pi]$ pour que l'égalité $\arccos(\cos(\alpha)) = \alpha$ soit satisfaite. Ainsi, seule la réponse B est juste.

Question 11 : C
La fonction arccos est définie sur $[-1;1]$ et la fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$. Par composition de fonctions t_n est définie sur $[-1;1]$ et seule la réponse C est juste.

Question 12 : A

$$\begin{aligned}
&\forall x \in D,\ t_0(x) = \cos(0 \times \arccos(x)) = \cos(0) = 1\\
&\forall x \in D,\ t_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x\\
&\forall x \in D,\ t_2(x) = \cos(2 \times \arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1\\
&\forall x \in D,\ t_3(x) = \cos(3 \times \arccos(x))
\end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos(3y) &= \cos(y)\cos(2y) - \sin(y)\sin(2y)\\
&= \cos(y)[2\cos^2(y) - 1] - \sin(y)[2\sin(y)\cos(y)]\\
&= 2\cos^3(y) - \cos(y) - 2\cos(y)[1 - \cos^2(y)]\\
&= 4\cos^3(y) - 3\cos(y)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
t_3(x) &= 4\cos^3(\arccos(x)) - 3\cos(\arccos(x))\\
&= 4x^3 - 3x
\end{aligned}$$

Conclusion, seule la réponse A est correcte.

Question 13 : C et D
Si $t_n(x_k) = 0$, alors $n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $\arccos(x_k) = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$.

En posant $\theta_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} = \frac{2k+1}{2n}\pi$, on a alors $\arccos(x_k) = \theta_k$.

En remarquant que $\arccos(x) = x$ n'est vrai qu'en un seul point, en général $\arccos(\theta_k) \neq \theta_k$ donc les réponses A et B sont fausses. En prenant le cas de l'égalité, $x_k = \cos(\theta_k)$. Comme $\cos(\theta_k) \in [-1;1]$ pour toute valeur de k dans $\mathbb{Z}$, $t_n(x_k)$ est bien défini et les réponses C et D sont correctes.

Question 14 : C
On a :

$$\begin{aligned} e^{ip\theta_k} &= e^{ip\frac{2k+1}{2n}\pi} \\ &= e^{\frac{ipk\pi}{n}} \times e^{\frac{ip\pi}{2n}} \\ &= e^{\frac{ip\pi}{2n}} \times \left(e^{\frac{ip\pi}{n}}\right)^k \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k} = e^{\frac{ip\pi}{2n}} \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{ip\pi}{n}}\right)^k$$

Comme $p \in \{1, ..., n-1\}$ on a $e^{\frac{ip\pi}{n}} \neq 1$ et on reconnait une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k} = e^{\frac{ip\pi}{2n}} \times \frac{1 - \left(e^{\frac{ip\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{ip\pi}{n}}} = e^{\frac{ip\pi}{2n}} \times \frac{1 - e^{ip\pi}}{1 - e^{\frac{ip\pi}{n}}}$$

Si p est un nombre pair, $e^{ip\pi} = 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k} = 0$. Sinon, $e^{ip\pi} = -1$ et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k} = \frac{2e^{\frac{ip\pi}{2n}}}{1 - e^{\frac{ip\pi}{n}}} &= \frac{2e^{\frac{ip\pi}{2n}}}{e^{\frac{ip\pi}{2n}}\left(e^{-\frac{ip\pi}{2n}} - e^{\frac{ip\pi}{2n}}\right)} \\ &= \frac{-2\cancel{e^{\frac{ip\pi}{2n}}}}{\cancel{e^{\frac{ip\pi}{2n}}} \times 2i\sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)} \\ &= \frac{i}{\sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)} \end{aligned}$$

Ainsi, seule la réponse C est correcte.

Question 15 : A et C
On a :

$$t_p(x_k) = \cos(p \arccos(x_k)) = \cos(p \arccos(\cos(\theta_k)))$$

Comme $\theta_k \in [0;\pi]$ si $k \in \{0, ..., n-1\}$, on a :

$$t_p(x_k) = \cos(p\theta_k) = \operatorname{Re}\left(e^{ip\theta_k}\right)$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k}\right)$$

Si p est pair, on constate que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = \operatorname{Re}(0) = 0$$

Si p est impair :

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = \operatorname{Re}\left(\frac{i}{\sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}\right) = 0$$

Donc seules les réponses A et C sont justes.

Question 16 : B

$$\begin{aligned}
t_{n-1}(x) + t_{n+1}(x) &= \cos((n-1)\theta) + \cos((n+1)\theta) \\
&= 2\cos\left(\frac{(n-1)\theta + (n+1)\theta}{2}\right) \times \cos\left(\frac{(n+1)\theta - (n-1)\theta}{2}\right) \\
&= 2\cos(n\theta)\cos(\theta) \\
&= 2t_n(x)x
\end{aligned}$$

Ainsi, seule la réponse B est correcte.

Question 17 : D
On a la relation de récurrence $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ d'après la question précédente avec $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ d'après la question 12. Par récurrence, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynôme. On montre par récurrence que T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} si $n \geqslant 1$:

- Initialisation : T_0 est de degré 0
  T_1 est de degré 1 et de coefficient dominant 2^{1-1}

- hérédité : supposons la proposition vraie aux rangs $n-1$ et n, alors :

$$T_{n+1} = \underbrace{2XT_n}_{\text{degré } n+1} - \underbrace{T_{n-1}}_{\text{degré } n-1}$$

donc T_{n+1} est de degré $n+1$, et son coefficient dominant est celui de $2XT_n$. Comme le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}, celui de $2XT_n$ est 2^n et la proposition est vraie au rang $n+1$.

•Conclusion : la réponse D est la seule correcte.

Question 18 : B
En reprenant la question 13, $T_n(x_k) = 0$ si $x_k = \cos(\theta_k)$ avec $k \in \{0, ..., n-1\}$. Tous les x_k sont distincts, donc T_n admet n racines réelles. Comme il est de degré n toutes ses racines sont réelles et seule la réponse B est correcte.

Question 19 : B et C
Si $u \in \text{Im}(p)$, il existe $x \in E$ tel que $u = p(x)$. Donc :

$$p(u) = p\left(p(x)\right) = p^2(x) = p(x) = u$$

Ainsi, la réponse B est juste et A est fausse. Si $u \in \text{Ker}(p)$, par définition $p(u) = 0$ et la réponse C est juste et D est fausse.

Question 20 : D
Si $u \in \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)$, alors $p(u) = u$ et $p(u) = 0$ donc $u = 0$.
En particulier, $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0\} \neq \emptyset$ donc la réponse A est fausse.

Considérons l'application $p(x, y) = (x, 0)$. p est un projecteur, et $\text{Ker}(p) = \text{vect}\left\{(0, 1)\right\}$, $\text{Im}(p) = \text{vect}\left\{(1, 0)\right\}$. Ainsi, le vecteur $(1, 1)$ n'appartient ni à $\text{Ker}(p)$ ni à $\text{Im}(p)$ mais à E donc la réponse B est fausse. De même, la réponse C est équivalente à la réponse B donc elle est fausse.

Enfin, on sait par théorème du rang que :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(E)) + \dim(\text{Im}(E))$$

Par ailleurs, $\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) = \{0\}$ donc $\text{Ker}(E)$ et $\text{Im}(E)$ sont supplémentaires dans E et la réponse D est juste.

Question 21 : C
$\forall x \in E$:

$$\begin{aligned} q^2(x) = q(q(x)) = q(x - p(x)) &= q(x) - q(p(x)) \\ &= x - p(x) - p(x) + p^2(x) \\ &= x - p(x) - p(x) + p(x) \\ &= x - p(x) \\ &= q(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $q^2 = q$, et les réponse B et D sont fausses. De plus :

$$x \in \text{Ker}(q) \Leftrightarrow q(x) = 0 \Leftrightarrow x - p(x) = 0 \Leftrightarrow x = p(x) \Leftrightarrow x \in \text{Im}(p)$$

Donc $\text{Ker}(q) = \text{Im}(p)$. Comme $\text{Im}(p) \neq \text{Ker}(p)$, la réponse A est fausse et C est juste.

Question 22 : E
Les endomorphismes p_1 et q_1 sont définis sur E, en particulier ils ne peuvent ni être des projecteurs ni des endomorphismes des sous espaces G et F. Les réponses sont toutes fausses.

Question 23 : C et D
Remarquons que :

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, 1, 1)$$

Ainsi, $F = \text{vect}\left((1, 1, 1)\right)$ et F est un sev de $\mathbb{R}^3$. De même :

$$(x, y, z) \in G \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, -2, 0) + z(0, 0, 1)$$

Ainsi $G = \text{vect}\left((1, -2, 0), (0, 0, 1)\right)$ et G est un sev de $\mathbb{R}^3$. De plus, $\dim(F) = 1$, $\dim(G) = 2$, d'où $\dim(F) + \dim(G) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$.

Par ailleurs, si $(x, y, z) \in F \cap G$ alors $x = y = z$ et $2x + y = 0$ donc $3x = 0 \Rightarrow x = 0$ puis $y = z = 0$, donc $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$. On a prouvé que F et G sont supplémentaires, donc seules les réponses C et D sont justes.

Question 24 : B
Comme F et G sont supplémentaires, tout vecteur $X = (x, y, z)$ s'écrit $X = X_F + X_G$ avec $X_F \in F$ et $X_G \in G$. On a alors :

$$\begin{cases} x = x_F + x_G \\ y = y_F + y_G \\ z = z_F + z_G \\ x_F = y_F = z_F \\ 2x_G + y_G = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_F + x_G \\ y = y_F - 2x_G \\ z = x_F + z_G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_G = x - y \\ 3x_F = y + 2x \\ z_G = z - x_F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x - y}{3} \\ x_F = \dfrac{2x + y}{3} \\ z_G = z + \dfrac{-2x - y}{3} \end{cases}$$

Ainsi, $X_F = \left(\dfrac{2x + y}{3}, \dfrac{2x + y}{3}, \dfrac{2x + y}{3}\right)$. Comme la projection p sur F parallèlement à G associe X_F à X, elle est représentée matriciellement par :

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} & 0 \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} & 0 \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Seule la réponse B est juste.

Question 25 : D
En reprenant les calculs précédents, $X_G = \left(\dfrac{x - y}{3}, \dfrac{-2x + 2y}{3}, z + \dfrac{-2x - y}{3}\right)$. La projection q sur G parallèlement à F associe X_G à X donc elle est représentée matriciellement par :

$$N = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} & 0 \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} & 0 \\ -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Seule la réponse D est correcte.

Question 26 : B
Calculons :

$$A^2 = \frac{1}{100}\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix}30 & 60 & 90\\ 20 & 40 & 60\\ 10 & 20 & 30\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = A$$

Ainsi, f est une projection et la réponse D est fausse. Par ailleurs, f est la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. Calculons $\mathrm{Ker}(f)$. Si $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$, alors :

$$\begin{cases} 3x + 6y + 9z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 2y + 3z = 0$$

Donc $G' = \{(x, y, z) \text{ tel que } x + 2y + 3z = 0\}$. Par ailleurs, $(x, y, z) \in \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $f(x) = x$, donc :

$$\begin{cases} 3x + 6y + 9z = 10x \\ 2x + 4y + 6z = 10y \\ x + 2y + 3z = 10z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7x + 6y + 9z = 0 \\ 2x - 6y + 6z = 0 \\ x + 2y - 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x + 15z = 0 \\ x + 2y - 7z = 0 \\ -10y + 20z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2x = 3y = 6z$$

Ainsi, $F' = \{(x, y, z) \text{ tel que } 2x = 3y = 6z\}$ et seule la réponse B est correcte.

Question 27 : C
Notons $n-2$, $n-1$, n, $n+1$ et $n+2$ les nombres entiers consécutifs et S leur somme de carrés. On a :

$$S = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5\left(n^2 + 2\right)$$

Si S est un carré alors $5|n^2 + 2$, donc $n^2 \equiv 3\ [5]$. Mais on constate que 3 n'est jamais un carré modulo 5 :

n [5]	0	1	2	3	4
n^2 [5]	0	1	4	4	1

Donc S n'est jamais un carré parfait, et seule la réponse C est juste.

Question 28 : A et D
Supposons que p est une somme de 3 carrés consécutifs $k-1$, k, et $k+1$, alors :

$$8n + 7 = (k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2 = 3k^2 + 2$$

En prenant cette égalité modulo 4 , $3k^2 \equiv 1\ [4]$. Mais ce n'est pas possible :

k [4]	0	1	2	3
$3k^2$ [4]	0	3	0	3

Donc la réponse D est juste et C est fausse. De même, si $p = a^2 + b^2 + c^2$, on a $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 7\ [8]$. Mais on sait que :

k [8]	0	1	2	3	4	5	6	7
k^2 [8]	0	1	4	1	0	1	4	1

Ainsi a^2, b^2, $c^2 \in \{1, 0, 4\}$ modulo 8. Mais :

$$\begin{aligned}
4+4+4 &\equiv 4\ [8] \not\equiv 7\ [8]\\
4+4+1 &\equiv 1\ [8] \not\equiv 7\ [8]\\
4+4+0 &\equiv 0\ [8] \not\equiv 7\ [8]\\
4+1+1 &\equiv 6\ [8] \not\equiv 7\ [8]\\
4+1+0 &\equiv 5\ [8] \not\equiv 7\ [8]\\
4+0+0 &\equiv 4\ [8] \not\equiv 7\ [8]\\
1+1+1 &\equiv 3\ [8] \not\equiv 7\ [8]\\
1+1+0 &\equiv 2\ [8] \not\equiv 7\ [8]\\
1+0+0 &\equiv 1\ [8] \not\equiv 7\ [8]\\
0+0+0 &\equiv 0\ [8] \not\equiv 7\ [8]
\end{aligned}$$

Ainsi, $a^2 + b^2 + c^2$ ne peut pas être égal à $8n + 7$ et la réponse B est fausse et A est juste.

Question 29 : B
Regardons la valeur de $8p^2 + 1$ modulo 3 :

p [3]	0	1	2
$8p^2 + 1$ [3]	1	0	0

Donc si $p \equiv 1$ ou 2 [3] alors $3|8p^2 + 1$. Le seul nombre premier divisible par 3 est 3, donc $8p^2 + 1 = 3$, ce qui est impossible. Donc $p \equiv 0$ [3], et $3|p$. Donc $p = 3$ comme p est premier. Et $8p^2 - 1 = 71$ est premier, $8p^2 - 3 = 69$, $8p^2 + 3 = 75$, $8p^2 + 5 = 77$ ne sont pas premiers. Seule la réponse B est juste.

Question 30 : D
Supposons que d est un nombre premier $\neq 1$ tel que $d|x$ et $d|y$, alors $d^2|z^2$, et donc $d|z$, et $\text{PGCD}(x, y, z) \neq 1$. De même, si $d|x$ et $d|z$, $d^2|x^2 - z^2 = y^2$ donc $d|y$, et $\text{PGCD}(x, y, z) \neq 1$. Enfin, si $d|y$ et $d|z$, $d^2|z^2 - y^2 = x^2$ donc $d|x$ et $\text{PGCD}(x, y, z) \neq 1$. Seule la réponse D est juste.

Question 31 : D
Si x, y et z sont pairs, $\text{PGCD}(x, y, z) \geqslant 2$ ce qui est contradictoire. Si x, y sont impairs, $x^2 + y^2$ est pair et donc z^2 est pair, donc z est pair, donc les réponses A et B sont fausses. De même, si deux nombres des x, y, z sont pairs, 2 divise le carré du troisième donc le troisième, donc la réponse C est fausse. Ainsi, le seul choix restant est la réponse D, et il y a deux nombres impairs et un pair.

Question 32 : A et D
Si z est pair, alors z^2 est multiple de 4 et $x^2+y^2 \equiv 0$ [4]. Mais un carré de nombre impair est toujours congru à 1 [4] :

k [4]	0	1	2	3
k^2 [4]	0	1	0	1

Donc $x^2+y^2 \equiv 2$ [4] ce qui est contradictoire. Ainsi, z est impair, et par la question 31, un des x, y est pair et l'autre impair. Les réponses A et D sont les seules correctes.

Question 33 : C
On calcule :

$$f_1(x) = \frac{1}{2-(1-x)} = \frac{1}{1+x}$$
$$f_2(x) = \frac{1}{2-\dfrac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{2+2x-1} = \frac{1+x}{1+2x}$$
$$f_3(x) = \frac{1}{2-\dfrac{1+x}{1+2x}} = \frac{1+2x}{2+4x-1-x} = \frac{1+2x}{1+3x}$$

Ainsi, la réponse C semble juste. On le montre par récurrence : si la proposition est vraie au rang n, alors :

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2-f_n(x)} = \frac{1}{2-\dfrac{1+(n-1)x}{1+nx}} = \frac{1+nx}{2+2nx-1-(n-1)x} = \frac{1+nx}{1+(n+1)x}$$

Ce qui prouve l'expression C.

Question 34 : E
On a :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (1+(n-1)x) \times \left(1-nx+n^2x^2-n^3x^3+n^4x^4-n^5x^5+o\left(x^5\right)\right) \\ &= 1+(n-1)x-nx+n^2x^2-n(n-1)x^2-n^3x^3+n^2(n-1)x^3 \\ &\qquad +n^4x^4-(n-1)n^3x^4-n^5x^5+(n-1)n^4x^5+o\left(x^5\right) \\ &= 1-x+nx^2-n^2x^3+n^3x^4-n^4x^5+o\left(x^5\right) \end{aligned}$$

En poussant à l'ordre 6, on aurait la même chose avec un terme supplémentaire en $n^5x^6+o\left(x^6\right)$. Les développements donnés dans l'énoncé sont tous en $x^5o(x) = o\left(x^6\right)$, ils ne sont donc pas à l'ordre 5 et sont faux.

Question 35 : C
La naissance de chaque enfant est indépendante, il y a donc une chance sur deux que le deuxième enfant soit une fille. Seule la réponse C est correcte.

Question 36 : B
Sachant qu'un des enfants est un garçon, il y a trois solutions possibles équiprobables :

• l'ainé est un garçon et le cadet est une fille
• l'ainé est un garçon et le cadet un garçon
• l'ainé est une fille et le cadet un garçon.

Ainsi, la probabilité d'avoir deux garçons est de 1/3 et seule la réponse B est juste.

Autre solution : si G est l'évènement avoir un garçon et G_1, G_2 l'enfant 1 ou 2 est un garçon, alors la formule de Bayes donne :

$$\mathrm{P}_G\left(G_1 \cap G_2\right) = \frac{\mathrm{P}\left(G_1 \cap G_2 \cap G\right)}{\mathrm{P}(G)} = \frac{\mathrm{P}\left(G_1 \cap G_2\right)}{\mathrm{P}(G)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$