Épreuve 2020
Mathématiques & Physique
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Solutions proposés par : Francis Brunel*

Préambule

Ce document propose le corrigé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2020. La correction est proposée dans le détail et chacun pourra, je l'espère, y trouver ce qu'il cherche pour optimiser sa préparation.

Précisons que le contenu de ce fichier est le résultat de mon travail uniquement. Ainsi, il est important de noter que ce document n'engage en rien l'ENAC.

Afin d'améliorer cet outil, je serai très reconnaissant de bénéficier de vos remarques et suggestions. Vous pouvez me les transmettre à l'adresse suivante :

contact@annales-enac.fr

*Auteur de l'ouvrage : Annales corrigées du concours GSEA/TSEEAC.

Corrigé 2020

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	C	A	C	D	B	A	C	D	A	E	B	BC	B	C

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	B	B	D	C	B	A	B	C	C	E	CD	B	C	B

Question 1 : D
Soit $x \in [-2;2]$:

$$f(-x) = \sqrt{1 - 0,25\,(-x)^2} = \sqrt{1 - 0,25x^2} = f(x)$$

Ainsi, la fonction f est paire et la droite d'équation $x = 0$ est axe de symétrie de C_f.
Question 2 : C
Introduisons $\{u : x \mapsto 1 - 0,25x^2\}$ définie, continue, dérivable sur $[-2;2]$. D'après le cours, $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur les intervalles où la fonction u est strictement positive et dérivable. En l'occurence ici, u est strictement positive et dérivable sur $]-2;2[$. Ainsi, f est dérivable sur $]-2;2[$ et $\forall x \in]-2;2[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times (-0,5x) \times (1 - 0,25x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-0,25x}{\sqrt{1 - 0,25x^2}}$$

Question 3 : A
A partir de l'expression de la dérivée établie à la question précédente, le tableau suivant est construit :

x	-2		0		2
$-0,25x$		$+$		$-$	
$\sqrt{1-0,25x^2}$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi, la fonction f est croissante sur $[-2;2]$, et décroissante sur $[0;2]$. La réponse A est juste car les intervalles proposés sont inclus dans ceux ci-dessus.
Question 4 : C
Soit $x \in]0;2[$:

$$\begin{aligned} Aire_{ABCD} &= AD \times AB \\ &= (x - (-x)) \times (f(x) - 0) \\ &= 2x \times f(x) \\ &= 2x\sqrt{1 - 0,25x^2} \\ &= \sqrt{4x^2 - x^4} \end{aligned}$$

Question 5 : D
La fonction g introduite plus tôt est définie, continue et dérivable sur $]0;2[$. On a $\forall x \in]0;2[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2} \times \left(8x - 4x^3\right) \times \frac{1}{\sqrt{4x^2 - x^4}} \\ &= \frac{1}{2} \times (4 - 2x^2) \times \frac{1}{\sqrt{1 - 0,25x^2}} \\ &= \frac{2 - x^2}{\sqrt{1 - 0,25x^2}} \end{aligned}$$

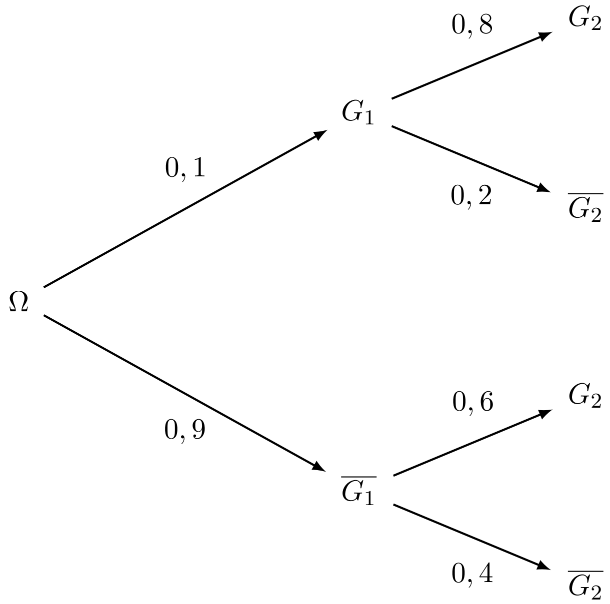
Question 6 : B
A partir de l'expression de la dérivée de g établie précédemment, le tableau suivant est construit :

x	0		$\sqrt{2}$		2
$2 - x^2$		$+$		$-$	
$\sqrt{1 - 0,25x^2}$		$+$		$+$	
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Le maximum de g, et ainsi l'aire maximale du rectangle $ABCD$ est atteinte pour $x = \sqrt{2}$.
Question 7 : A
La valeur maximale de l'aire du rectangle $ABCD$ vaut :

$$\begin{aligned} g\left(\sqrt{2}\right) &= \sqrt{4 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^4} \\ &= \sqrt{8 - 4} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

Question 8 : C
D'après les données de l'énoncé :



D'après la formules des probabilités totales, puis d'après la formule des probabilités conditionnelles, et enfin à partir des informations fournies :

$$\begin{aligned} p_2 = \mathrm{P}(G_2) &= \mathrm{P}\left(G_1 \cap G_2\right) + \mathrm{P}\left(\overline{G_1} \cap G_2\right) \\ &= \mathrm{P}_{G_1}(G_2) \times \mathrm{P}\left(G_1\right) + \mathrm{P}_{\overline{G_1}}(G_2) \times \mathrm{P}\left(\overline{G_1}\right) \\ &= 0,8 \times 0,1 + 0,6 \times 0,9 \\ &= 0,08 + 0,54 \\ &= 0,62 \end{aligned}$$

Question 9 : D
Calculons grâce à la formule des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} \widetilde{p} &= \mathrm{P}_{G_2}(\overline{G_1}) \\ &= \frac{\mathrm{P}\left(\overline{G_1} \cap G_2\right)}{\mathrm{P}(G_2)} \\ &= \frac{0,6 \times 0,9}{0,62} \\ &= \frac{0,54}{0,62} = \frac{27}{31} \end{aligned}$$

Question 10 : A
Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathrm{P}\left(G_{n+1}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(G_{n+1} \cap G_n\right) + \mathrm{P}\left(G_{n+1} \cap \overline{G_n}\right) \\ &= \mathrm{P}_{G_n}(G_{n+1}) \times \mathrm{P}\left(G_n\right) + \mathrm{P}_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \times \mathrm{P}\left(\overline{G_n}\right) \\ &= 0,8 \times \mathrm{P}(G_n) + 0,6 \times \mathrm{P}\left(\overline{G_n}\right) \\ &= 0,8 \times p_n + 0,6 \times (1 - p_n) \\ &= 0,6 + 0,2 \times p_n \\ &= \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times p_n \end{aligned}$$

Question 11 : E
Nous sommes ici devant un exemple de suite arithmético-géométrique. Le calcul de l'expression du terme général p_n en fonction de n à partir de la relation de récurrence n'est pas au programme de terminale. Comme le terme $p_1 = 0,1$ est fourni par l'énoncé, et que $p_2 = 0,62$ a été calculée précédemment, il peut être tentant de tester les expressions proposées :

Proposition A :

$$p_1 = \frac{1}{3} - \frac{7}{6} \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3} + \frac{7}{6 \times 5} = \frac{10+7}{30} = \frac{17}{30}$$

En contradiction avec l'énoncé. Donc la proposition A est à écarter.

Proposition B :

$$p_1 = \frac{3}{4} + \frac{13}{4} \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{4} - \frac{13}{4 \times 5} = \frac{15-13}{20} = \frac{1}{10}$$

Cohérent avec la valeur de l'énoncé.

$$p_2 = \frac{3}{4} + \frac{13}{4} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{13}{4} \times \frac{1}{25} = \frac{75+13}{100} = \frac{88}{100}$$

En contradiction avec la valeur p_2 calculée précédemment. Donc la proposition B est à écarter.

Proposition C :

$$p_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{2} - \frac{4}{10} = \frac{5-4}{10} = \frac{1}{10}$$

Cohérent avec la valeur de l'énoncé.

$$p_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{16}{25} = \frac{25-16}{50} = \frac{9}{50}$$

En contradiction avec la valeur p_2 calculée précédemment. Donc la proposition C est à écarter.

Proposition D :

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{10} = \frac{5-4}{10} = \frac{1}{10}$$

Cohérent avec la valeur de l'énoncé.

$$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{16}{25} = \frac{25+16}{50} = \frac{41}{50}$$

En contradiction avec la valeur p_2 calculé précédemment. Donc la proposition D est à écarter.

Ainsi, aucune des propositions ne correspond aux résultats établis jusqu'à présent. Nous avons donc trouvé un moyen de répondre cette question, sans déterminer l'expression générale de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Néanmoins, on constate que l'on est gêné pour répondre à la question suivante. Reprenons alors le résultat de la question précédente, et tentons un raisonnement par calcul direct. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, n suffisamment grand :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \frac{1}{5} \times p_n + \frac{3}{5} \\
&= \frac{1}{5} \times \left[\frac{1}{5} p_{n-1} + \frac{3}{5}\right] + \frac{3}{5} \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)^2 p_{n-1} + \frac{3}{5}\left[1 + \frac{1}{5}\right] \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left[\frac{1}{5} p_{n-2} + \frac{3}{5}\right] + \frac{3}{5}\left[1 + \frac{1}{5}\right] \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)^3 p_{n-2} + \frac{3}{5}\left[1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

On commence à reconnaitre dans le terme de droite la somme d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. Descendons jusqu'au terme p_1. En faisant attention aux indices :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \left(\frac{1}{5}\right)^n p_1 + \frac{3}{5} \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5}\right)^k \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)^n p_1 + \frac{3}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^n p_1 + \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} \times \left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$$
$$= \left(\frac{1}{5}\right)^n \times \frac{1}{10} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$
$$= \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{10} - \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{2-15}{20} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{13}{20} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

Conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Question 12 : B

Dans le cas où l'on a déterminé l'expression générale de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}$$
$$\left(\text{car } \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

Sinon, p_{n+1} s'exprimant en fonction de p_n, on se retrouve dans une configuration où le théorème du point fixe pourrait être applicable. D'après la définition de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* : p_n \in [0;1]$. Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Raisonnons alors par récurrence pour prouver la monotonie de la suite. Comme $p_2 > p_1$, la proposition sera la suivante :

$$\{H_n : p_{n+1} > p_n\}$$

Vérifions :

$$H_1 : p_2 = 0,62 > 0,1 = p_1$$

Oui, c'est vrai. On suppose maintenant H_n vraie.

$$H_n : p_{n+1} > p_n$$

On applique la fonction $\left\{g : x \mapsto \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}\right\}$, définie sur $\mathbb{R}$, à l'inégalité précédente. La fonction étant évidemment strictement croissante sur $\mathbb{R}$, le sens de l'inégalité, ainsi que son caractère strict seront conservés. On obtient :

$$\frac{1}{5}p_{n+1} + \frac{3}{5} > \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow p_{n+2} > p_{n+1} : H_{n+1}$$

La récurrence est donc vérifiée. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} > p_n$. Ainsi, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

La suite est donc croissante et majorée, donc elle converge, vers l. Conclusion, d'après le théorème du point fixe, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l, et g définie plus tôt étant continue :

$$\begin{aligned} l = g(l) &\Rightarrow l = \frac{1}{5}l + \frac{3}{5} \\ &\Rightarrow \frac{4}{5}l = \frac{3}{5} \\ &\Rightarrow l = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Question 13 : B et C
Calculons les longueurs :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 - 3\right)^2}$$

$$= \sqrt{3 + \frac{1}{4} + \sqrt{3} + \frac{3}{4} + 1 - \sqrt{3}} = \sqrt{5}$$

$$CA = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{\left(1 - \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 3 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} + 1 + \sqrt{3}} = \sqrt{5}$$

Les longueurs sont égales. Donc le triangle ABC est équilatéral, et donc également isocèle. De plus :

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= 5 + 5 = 10 \neq CA^2 \\ AB^2 + CA^2 &= 5 + 5 = 10 \neq BC^2 \\ BC^2 + CA^2 &= 5 + 5 = 10 \neq AB^2 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.
Conclusion, le triangle est isocèle et équilatéral.

Question 14 : B
On a :

$$\begin{aligned} z &= \left(\sqrt{3} + i\right)^{1515} \\ &= 2^{1515}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{1515} \\ &= 2^{1515}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{1515} \end{aligned}$$

D'où :

$$|z| = \left|2^{1515}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{1515}\right| = 2^{1515} \times \left|\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{1515}\right|$$

$$= 2^{1515} \times \left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^{1515} = 2^{1515} \times 1^{1515} = 2^{1515}$$

Et :

$$\arg(z) = \arg\left(2^{1515}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{1515}\right) \ [2\pi]$$

$$= \arg\left(2^{1515}\right) + 1515 \times \arg\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\ [2\pi]$$
$$= 0 + 1515 \times \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$
$$= \frac{1515\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Simplifions l'expression de z. Pour cela calculons à la main la division euclidienne de 1515 par 6. On trouve :

$$1515 = 252 \times 6 + 3$$

Ainsi :

$$z = 2^{1515}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{1515} = 2^{1515}e^{i\frac{(252\times 6+3)\pi}{6}} = 2^{1515}e^{i252\pi}e^{i\frac{3\pi}{6}} = 2^{1515}e^{i\frac{\pi}{2}} = 2^{1515}i$$

Conclusion, z est un imaginaire pur.

Question 15 : C

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition :

$$|z-1| = |z-i|$$

correspond aux points situés sur la médiatrice du segment de coordonnées cartésiennes $(1;0)$, $(1;0)$, c'est à dire sur la droite d'équation $y = x$. Par ailleurs, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition :

$$|z-1-2i| \leqslant 3$$

correspond aux points situés à une distance inférieur à 3 du point de coordonnées $(1;2)$, c'est à dire dans le disque de centre de coordonnées cartésiennes $(1;2)$ et de rayon 3. Ainsi, si l'on note A et B les points d'intersection du cercle C et de la droite Δ, alors l'ensemble S des points vérifiant les deux conditions précédentes est le segment $[AB]$.

Question 16 : B

Pour une onde mécanique progressive :

$$\lambda = \frac{\mathrm{v}}{f}$$

Où «λ» est la longueur d'onde (en m), «v» la célérité de l'onde (en m/s) et «f» sa fréquence (en Hz). Ainsi :

$$\mathrm{v} = f \times \lambda$$

L'énoncé donne le tableau des fréquences des notes, et indique que le mi_0 peut être joué. On a donc f_{mi_0} à partir du document P1-2, cependant on ignore λ_{mi_0}. Mais, l'énoncé indique également que la note la plus grave pouvant être jouée est le mi_0. Autrement dit, la fréquence la plus basse pouvant être joué est celle du mi_0. La fréquence la plus basse correspond à la longueur d'onde la plus grande d'après l'équation rappelée plus haut. On a donc :

$$\lambda_{mi_0} = \lambda_{\max}$$

Cherchons alors $\lambda_{\max}$. D'après l'énoncé, pour chaque note émise, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$L = p \times \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{p}$$

Où «L» est la longueur du tube (en m) et «λ» la longueur d'onde d'une note émise (en m). Pour maximiser cette relation, on prend $p = 1$ et $L = L_{\max}$. Ce qui donne :

$$\lambda_{\max} = \frac{2 \times L_{\max}}{1} = 2 \times 4,126 = 8,252 \text{ m}$$

Ainsi :

$$\text{v} = f_{mi_0} \times \lambda_{mi_0} = 41,2 \times 8,252 \simeq 340 \text{ m.s}^{-1}$$

Question 17 : B
On a toujours la relation :

$$\lambda = \frac{\text{v}}{f}$$

Où «λ» est la longueur d'onde (en m), «v» la célérité de l'onde (en m/s) et «f» sa fréquence (en Hz). Ainsi, dans le cas du si bémol :

$$\lambda_{si\ \text{b}_1} = \frac{\text{v}}{f_{si\ \text{b}_1}} = \frac{340}{116,5} = 2,918 \text{ m} = L$$

Question 18 : B
Prenons les notes proposées et évaluons s'il existe pour chacune, une longueur de trombone L permettant de la jouer.
Pour le sol_0, cherchons $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$L_{sol_0} = p \times \frac{\lambda_{sol_0}}{2} \text{ et } 2,918 \leqslant L_{sol_0} \leqslant 4,126$$

Testons :

$$p = 1 \Rightarrow L_{sol_0} = \frac{\lambda_{sol_0}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{v}}{f_{sol_0}} = \frac{1}{2} \times \frac{340}{49} \simeq \frac{1}{2} \times 7 \simeq 3,5 \text{ m}$$

Avec $p = 1$ les deux conditions sont remplies. Ainsi, la note sol_0 peut être jouée, pour une longueur de trombone de 3,5 m.
De manière identique, pour le $ré_1$, cherchons $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$L_{ré_1} = p \times \frac{\lambda_{ré_1}}{2} \text{ et } 2,918 \leqslant L_{ré_1} \leqslant 4,126$$

Testons :

$$p = 1 \Rightarrow L_{ré_1} = \frac{\lambda_{ré_1}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{v}}{ré_1} = \frac{1}{2} \times \frac{340}{73,4} \simeq \frac{1}{2} \times 4,6 \simeq 2,3 \text{ m} < 2,918 \text{ m}$$

$$p = 2 \Rightarrow L_{ré_1} = 2 \times \frac{\lambda_{ré_1}}{2} = \frac{\text{v}}{f_{ré_1}} = \frac{340}{73,4} \simeq 4,6 \text{ m} > 4,126 \text{ m}$$

$$p = 3 \Rightarrow L_{\text{ré}_1} \simeq \frac{3}{2} \times 4,6 \simeq 6,9 \text{ m} > 4,126 \text{ m}$$

$$\ldots$$

Ainsi, il n'existe aucune configuration permettant de jouer la note $ré_1$.
L'énoncé indique qu'il n'y a qu'une seule note parmi les quatre proposées qui ne peut être émise, donc la démonstration peut s'arrêter là. Néanmoins, par acquis de conscience, il est possible de réaliser ce même raisonnement pour sol_1 et $ré_2$, pour lesquelles cela fonctionne respectivement pour $p = 2$ et $p = 3$.
Question 19 : D
La figure du spectre d'un son émis par le trombone indique une fréquence du fondamental d'environ 300 Hz. Or, la fréquence du motif visible sur les signaux correspond à la fréquence du fondamental. Cherchons donc le signal présentant une fréquence de motif de 300 Hz.

A : 6 motifs/1 ms $\Rightarrow$ une fréquence de motif de $\dfrac{6}{10^{-3}} = 6\ 000$ Hz

B : 6 motifs/2 ms $\Rightarrow$ une fréquence de motif de $\dfrac{6}{2 \times 10^{-3}} = 3\ 000$ Hz

C : 6 motifs/10 ms $\Rightarrow$ une fréquence de motif de $\dfrac{6}{10^{-2}} = 600$ Hz

D : 6 motifs/20 ms $\Rightarrow$ une fréquence de motif de $\dfrac{6}{2 \times 10^{-2}} = 300$ Hz

Conclusion, le signal correspondant est le signal D.

Question 20 : C

Le spectre proposée à la question précédente affiche plusieurs fréquences d'amplitudes différentes, dont la fréquence du fondamental d'environ 300 Hz, ce qui correspond à la fréquence du *ré* de l'octave 3.

Question 21 : B

Calculons :

$$\frac{L_{ténor} - L_{alto}}{L_{ténor}}$$

En s'appuyant sur le résultat de la question 18, il vient :

$$\frac{L_{ténor} - L_{alto}}{L_{ténor}} = \frac{\lambda_{si\ \mathrm{b}_1} - L_{alto}}{\lambda_{si\ \mathrm{b}_1}}$$

Or, d'après l'énoncé, pour chaque note émise, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$L = p \times \frac{\lambda}{2}$$

Où «L» est la longueur du tube (en m) et «λ» la longueur d'onde d'une note émise (en m).
D'après l'énoncé, les sept notes les plus graves que peut sortir un trombone alto vont du la_0 au mi b_1. Ces sept notes sont donc associées aux sept fréquences les plus basses que peux sortir cet instrument, et ainsi aux sept longueurs d'onde les plus grandes. On cherche ici la longueur minimale de l'instrument et ainsi, la longueur d'onde la plus faible donc la fréquence la plus élevée.
Le mi b_1 étant la note la plus aiguë des notes les plus graves, elle correspond à la longueur minimale de l'instrument dans la configuration où $p = 1$. D'où :

$$L_{alto} = \frac{\lambda_{mi\ \mathrm{b}_1}}{2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{L_{ténor} - L_{alto}}{L_{ténor}} &= \frac{\lambda_{si\ \mathrm{b}_1} - \dfrac{\lambda_{mi\ \mathrm{b}_1}}{2}}{\lambda_{si\ \mathrm{b}_1}} \\
&= \frac{\dfrac{\mathrm{v}}{f_{si\ \mathrm{b}_1}} - \dfrac{\mathrm{v}}{2 \times f_{mi\ \mathrm{b}_1}}}{\dfrac{\mathrm{v}}{f_{si\ \mathrm{b}_1}}} \\
&= \frac{2 \times f_{mi\ \mathrm{b}_1} - f_{si\ \mathrm{b}_1}}{2 \times f_{mi\ \mathrm{b}_1}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{f_{mi\ \mathrm{b}_1} - \dfrac{f_{si\ \mathrm{b}_1}}{2}}{f_{mi\ \mathrm{b}_1}}$$
$$= \frac{77,8 - \dfrac{116,5}{2}}{77,8}$$
$$\simeq \frac{77,8 - 58,3}{77,8}$$
$$\simeq \frac{19,5}{77,8}$$
$$\simeq 25\%$$

Conclusion, le trombone alto est 25% plus court que le trombone ténor.

Question 22 : A

Soit «I_1» l'intensité sonore généré par un trombone à 20 m (en W/m^2). Alors :

$$L_1 = 10\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = 90 \text{ dB}$$

Où «L_1» est le niveau d'intensité sonore (en dB), et «I_0» tel que $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 le seuil d'audibilité. Avec trois trombones dans les mêmes conditions, on a :

$$L_2 = 10\log\left(\frac{3I_1}{I_0}\right) = 10\log(3) + 10\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right)$$
$$= 10\log(3) + L_1 \simeq 4,8 + 90 \simeq 94,8 \text{ dB}$$

Question 23 : B

On étudie le système S=«flèche» assimilé à un point, dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen. La seconde loi de Newton indique alors :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = m\overrightarrow{a}$$

où «$\sum \overrightarrow{F}_{ext}$» est la somme des forces extérieures s'appliquant au système S (en Newton), «m» est la masse du système S (en kg), et «$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$» l'accélération du centre de gravité du système S (en m.s^{-2}). Or le système n'est soumis qu'à son propre poids car les frottements sont négligés. Ainsi :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{a}$$
$$\Rightarrow m\overrightarrow{g} = m\overrightarrow{a}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{g} = \overrightarrow{a}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{cases} a_x(t) &= 0 \\ a_y(t) &= 0 \\ a_z(t) &= -g \end{cases}$$

En intégrant une première fois :

$$\begin{cases} \mathrm{v}_x(t) &= \mathrm{v}_x(0) \\ \mathrm{v}_y(t) &= 0 \\ \mathrm{v}_z(t) &= -gt + \mathrm{v}_z(0) \end{cases}$$

Or :

$$\mathrm{v}_x(0) = \overrightarrow{\mathrm{v}_0}.\overrightarrow{x} = \mathrm{v}_0 \cos(\overrightarrow{\mathrm{v}_0}, \overrightarrow{x}) = \mathrm{v}_0 \cos(-\alpha) = \mathrm{v}_0 \cos(\alpha)$$

Et :

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_z(0) &= \overrightarrow{\mathrm{v}_0}.\overrightarrow{z} = \mathrm{v}_0 \cos(\overrightarrow{\mathrm{v}_0}, \overrightarrow{z}) = \mathrm{v}_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= \mathrm{v}_0 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\alpha)\right] = \mathrm{v}_0 \sin(\alpha) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{cases} \mathrm{v}_x(t) &= \mathrm{v}_0 \cos(\alpha) \\ \mathrm{v}_y(t) &= 0 \\ \mathrm{v}_z(t) &= -gt + \mathrm{v}_0 \sin(\alpha) \end{cases}$$

L'origine de la trajectoire étant confondue avec $O(0, 0, 0)$, en intégrant une seconde fois, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) &= (\mathrm{v}_0 \cos(\alpha))\, t \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= -\dfrac{1}{2}gt^2 + (\mathrm{v}_0 \sin(\alpha))\, t \end{cases}$$

Question 24 : C

D'après l'équation précédente, on a pour tout réel t positif :

$$x(t) = (\mathrm{v}_0 \cos(\alpha))\, t \Rightarrow t = \frac{x}{\mathrm{v}_0 \cos(\alpha)}$$

En réinjectant dans l'équation horaire de z établie à la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\mathrm{v}_0 \cos(\alpha)}\right)^2 + (\mathrm{v}_0 \sin(\alpha)) \times \frac{x}{\mathrm{v}_0 \cos(\alpha)} \\ &= -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{\mathrm{v}_0^2 \cos^2(\alpha)} + x\tan(\alpha) \end{aligned}$$

Question 25 : C

Calculons l'énergie mécanique du système S :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + mgz$$

Où «E_c» est l'énergie cinétique de la flèche (en Joules), «E_p» son énergie potentielle (en Joules), «m» la masse de la flèche (en kg), «v» sa vitesse (en m.s^{-1}), «g» l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre (en m.s^{-2}), et «z» la hauteur de la flèche (en m).

L'énoncé indique que la résistance de l'air a peu d'effet. Alors, le système ne subit pas de forces non conservatrices, ainsi d'après le principe de conservation de l'énergie :

$$\Delta E_m = 0 \Leftrightarrow E_m = cte$$

Calculons alors cette énergie mécanique à l'origine :

$$E_m = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2 + mg \times 0 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2$$

Pour éliminer la proposition B, précisons que l'énergie mécanique de la flèche est la même en tout point de sa trajectoire. Ainsi :

$$E_m = E_m(O) = E_m(C)$$

Mais le point A ne fait pas parti de la trajectoire de la flèche, on ne peut donc pas faire le calcul de l'énergie mécanique en ce point.

Question 26 : E

Au sommet de la trajectoire, la vitesse verticale de la flèche est nulle. Notons t_1 l'instant où la flèche est au sommet de sa trajectoire. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_z(t_1) &= 0 \\ \Rightarrow -gt_1 + \mathrm{v}_0 \sin(\alpha) &= 0 \\ \Rightarrow t_1 &= \frac{\mathrm{v}_0 \sin(\alpha)}{g} \end{aligned}$$

En réinjectant ce résultat dans l'équation horaire de z, on obtient :

$$\begin{aligned} z_{max} = z\left(t_1\right) &= -\frac{1}{2}gt_1^2 + \left(\mathrm{v}_0 \sin(\alpha)\right) t_1 \\ &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{\mathrm{v}_0 \sin(\alpha)}{g}\right)^2 + \left(\mathrm{v}_0 \sin(\alpha)\right) \times \frac{\mathrm{v}_0 \sin(\alpha)}{g} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} + \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} \end{aligned}$$

Question 27 : C et D

Soit un temps de vol t_V tel que :

$$x\left(t_\mathrm{V}\right) = D$$

où «D» est la distance entre l'archer et la cible (70 m d'après l'énoncé).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\mathrm{v}_0 \cos(\alpha)\right) t_\mathrm{V} &= D \\ \Rightarrow t_\mathrm{V} &= \frac{D}{\mathrm{v}_0 \cos(\alpha)} \qquad (1) \end{aligned}$$

Or, dans le triangle rectangle OAC :

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{h}{D} \\ \Rightarrow D &= \frac{h}{\tan(\alpha)} \end{aligned}$$

A partir de (1), on a alors :

$$t_\mathrm{V} = \frac{\dfrac{h}{\tan(\alpha)}}{\mathrm{v}_0 \cos(\alpha)} = \frac{h}{\tan(\alpha)\mathrm{v}_0 \cos(\alpha)} = \frac{h}{\mathrm{v}_0 \sin(\alpha)}$$

$$\Rightarrow h = t_{\mathrm{V}}\mathrm{v}_0 \sin(\alpha) \qquad (2)$$

Mais, la cible est située sur l'axe (Ox). Ainsi :

$$z(t_{\mathrm{V}}) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}gt_{\mathrm{V}}^2 + (\mathrm{v}_0 \sin(\alpha))\, t_{\mathrm{V}} = 0$$

En utilisant (2) :

$$-\frac{1}{2}gt_{\mathrm{V}}^2 + h = 0$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}gt_{\mathrm{V}}^2$$

Question 28 : B

D'après le document P2-1, dans le cas où la flèche atteint la cible :

$$x = D \text{ et } z = 0$$

Ainsi, l'équation cartésienne établie en question 24 donne :

$$0 = -\frac{1}{2}g\frac{D^2}{\mathrm{v}_0^2\cos^2(\alpha)} + D\tan(\alpha)$$

$$\Rightarrow D\left[\tan(\alpha) - \frac{1}{2}g\frac{D}{\mathrm{v}_0^2\cos^2(\alpha)}\right] = 0$$

Or $D = 70$ m d'après l'énoncé. D'où :

$$\tan(\alpha) - \frac{1}{2}g\frac{D}{\mathrm{v}_0^2\cos^2(\alpha)} = 0$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{1}{2}g\frac{D}{\mathrm{v}_0^2\cos^2(\alpha)}$$

$$\Rightarrow D = \frac{2\tan(\alpha)\mathrm{v}_0^2\cos^2(\alpha)}{g} = \frac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\mathrm{v}_0^2}{g} = \frac{\sin(2\alpha)\,\mathrm{v}_0^2}{g}$$

$$\Rightarrow \sin(2\alpha) = \frac{gD}{\mathrm{v}_0^2}$$

Question 29 : C

On a pour un objet en mouvement rectiligne uniforme :

$$\mathrm{v} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Où «v» est la vitesse de l'objet (en m.s^{-1}) et «Δd» la distance parcourue (en m) pour une durée «Δt» (en s).

Appliqué à l'électron dans le référentiel terrestre, il vient :

$$\mathrm{v} = \frac{10}{100 \times 10^{-9}} = 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Question 30 : B
Rappelons la relation :

$$\Delta T' = \gamma \Delta T$$

Où «$\Delta T'$» est la durée observée dans le référentiel où l'objet est en translation (en s), «ΔT» est la durée dans le référentiel où l'objet est immobile (en s), et «γ» le coefficient de dilatation temporelle (sans dimension).
Ainsi, dans le référentiel lié à l'électron :

$$\Delta T = \frac{\Delta T'}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}} \times \Delta T'$$

$$= \sqrt{1 - \frac{\left(10^8\right)^2}{\left(3 \times 10^8\right)^2}} \times \Delta T'$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{3^2}} \times \Delta T'$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{9}} \times \Delta T'$$

$$= \sqrt{\frac{8}{9}} \times \Delta T'$$

$$= \sqrt{\frac{8}{9}} \times 100 \times 10^{-9}$$

$$\simeq 94 \times 10^{-9} \text{ s} = 94 \text{ ns}$$