Épreuve 2020
Mathématiques & Physique
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2020.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 3h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

PARTIE MATHÉMATIQUES

Questions liées :
1 à 7
8 à 12

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement les ensembles des réels, des entiers naturels, des entiers relatifs et des nombres complexes.
Le nombre i désigne le nombre complexe défini par $i^2 = -1$.

PARTIE I

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 2]$ par :

$$f(x) = \sqrt{1 - 0,25x^2}$$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Question 1 :

Un calcul de $f(-x)$ donne :

A - $f(-x) = f(x)$: la fonction f est impaire.
B - $f(-x) = -f(x)$: la fonction f est paire.
C - Le point $O(0; 0)$ est centre de symétrie de C_f.
D - La droite d'équation $x = 0$ est axe de symétrie de C_f.

Question 2 :

Le calcul de la dérivée f' de la fonction f donne :

A - $f'(x) = -0,5x\sqrt{1 - 0,25x^2}\ ,\ x \in [-2; 2]$
B - $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - 0,25x^2}}\ ,\ x \in]-2; 2[$
C - $f'(x) = -\dfrac{0,25x}{\sqrt{1 - 0,25x^2}}\ ,\ x \in]-2; 2[$
D - $f'(x) = \dfrac{0,25x}{\sqrt{1 - 0,25x^2}}\ ,\ x \in]-2; 2[$

Question 3 :

Ainsi on en déduit :

A - La fonction f est croissante sur $]-2; 0[$ et décroissante sur $]0; 2[$.
B - La fonction f est décroissante sur $]-2; 0[$ et croissante sur $]0; 2[$.
C - La fonction f est croissante sur $]-2; 2[$.
D - La fonction f est décroissante sur $]-2; 2[$.

Pour tout réel x de l'intervalle $]0; 2[$, on note :
A le point de coordonnées $(x; 0)$,
D le point de coordonnées $(-x; 0)$,
B le point de coordonnées $(x; f(x))$,
et C le point de coordonnées $(-x; f(-x))$.

Question 4 :

Soit g la fonction qui a tout réel x de l'intervalle $]0;2[$ associe l'aire du rectangle $ABCD$. On a :

A - $g(x) = x\sqrt{1-0,25x^2}$

B - $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-0,25x^2}}$

C - $g(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$

D - $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-0,25x^2}}$

Question 5 :

Ainsi, la dérivée g' de la fonction g sur $]0;2[$ peut s'écrire :

A - $g'(x) = \dfrac{1-0,5x^2}{\sqrt{1-0,25x^2}}$

B - $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-0,25x^2}}$

C - $g'(x) = \dfrac{1-0,5x^2}{2\sqrt{1-0,25x^2}}$

D - $g'(x) = \dfrac{2-x^2}{\sqrt{1-0,25x^2}}$

Question 6 :

L'aire du rectangle $ABCD$ est alors maximale pour :

A - $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

B - $x = \sqrt{2}$

C - $x = 2$

D - $x = 0,5$

Question 7 :

La valeur maximale S de cette aire est ainsi :

A - $S = 2$

B - $S = 1$

C - $S = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D - $S = 4$

PARTIE II

Un joueur débute un jeux video et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est $0,1$:
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$:
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$:

On note, pour tout entier n non nul :

- G_n l'évènement "le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie" ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

Question 8 :

On montre que :

A - $p_2 = 0,6$

B - $p_2 = 0,78$

C - $p_2 = 0,62$

D - $p_2 = 0,8$

Question 9 :

Le joueur a gagné la deuxième partie. La probabilité $\widetilde{p}$ qu'il ait perdu la première est :

A - $\widetilde{p} = \dfrac{1}{19}$

B - $\widetilde{p} = \dfrac{18}{31}$

C - $\widetilde{p} = \dfrac{4}{19}$

D - $\widetilde{p} = \dfrac{27}{31}$

Question 10 :

On montre, que pour tout entier naturel n non nul :

A - $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$

B - $p_{n+1} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}p_n$

C - $p_{n+1} = \dfrac{4}{5}p_n + \dfrac{1}{10}$

D - $p_{n+1} = \dfrac{9}{10} - \dfrac{4}{5}p_n$

Question 11 :

Ainsi, pour tout entier naturel n non nul :

A - $p_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{7}{6}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n$

B - $p_n = \dfrac{3}{4} + \dfrac{13}{4}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n$

C - $p_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

D - $p_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{4}{5}\right)^n$

Question 12 :

On obtient ainsi :

A - $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$

B - $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{3}{4}$

C - $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{3}$

D - $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$

PARTIE III

Les questions de cette partie sont indépendantes.

Question 13 :

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + i,\ b = 3i,\ c = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)$$

A - Le triangle ABC est un triangle rectangle.

B - Le triangle ABC est un triangle isocèle.

C - Le triangle ABC est un triangle équilatéral.

D - Le triangle ABC est un triangle ni rectangle, ni isocèle, ni équilatéral.

Question 14 :

Soit le nombre complexe $z = \left(\sqrt{3} + i\right)^{1515}$.

A - Le nombre complexe z est un réel.

B - Le nombre complexe z est un imaginaire pur.

C - $\arg(z) = \dfrac{1515\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

D - $|z| = \left(\sqrt{2}\right)^{1515}$.

Question 15 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions :

$$|z-1| = |z-i| \text{ et } |z-1-2i| \leqslant 3$$

On désigne par C le cercle de centre le point de coordonnées $(1;2)$ et de rayon 3, et par Δ la droite d'équation $y = x$.

A - L'ensemble S est la réunion des ensembles C et Δ.

B - L'ensemble S est l'intersection des ensembles C et Δ.

C - Soient A et B les points d'intersections de C et Δ. L'ensemble S est le segment $[AB]$.

D - L'ensemble S est réduit au point $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

PARTIE PHYSIQUE

Questions liées :
16 à 22
23 à 28
29 et 30

Partie P1 : Ondes

Document P1-1 - Le trombone, un instrument à vent

Le trombone est un instrument à vent en cuivre, à tube cylindrique, caractérisé par l'emploi de la coulisse. Il forme une famille de trois types, appelés trombones alto, ténor et basse, dont le second, le trombone ténor est le plus répandu et est appelé «trombone» tout court. On le construit en si bémol, en lui donnant pour son fondamental le si bémol de 116,5 vibrations simples et pour longueur théorique 2,918 m.
Les allongements de la coulisse sont obtenus par les mouvements du bras droit. La longueur totale de l'instrument varie alors entre 2,918 m et 4,126 m.

La main gauche sert avec les lèvres à exercer le degrés de pression nécessaire pour obtenir les différentes notes. Si on note L la longueur du tube et λ la longueur d'onde d'une note émise, ces deux grandeurs vérifient la relation $L = p \times \frac{\lambda}{2}$, p étant un entier positif non nul.
Dans ces conditions, la note la plus grave que peut sortir un tromboniste entraîné est un mi_0 (voir document suivant).

(D'après www.cosmovisions.com/musiTrombone.htm)

Document P1-2 - Fréquences (en Hz) des notes des octaves 0 à 5

Octave	0	1	2	3	4	5
do (ou *ut*)	32,7	65,4	130,8	261,6	523,3	1046,6
do # / *ré* b	34,6	69,3	138,6	277,2	554,4	1108,8
ré	36,7	73,4	146,8	293,7	587,3	1174,6
ré # / *mi* b	38,9	77,8	155,6	311,1	622,3	1244,6
mi	41,2	82,4	164,8	329,6	659,3	1318,6
fa	43,7	87,3	174,6	349,2	698,5	1397,0
fa # / *sol* b	46,2	92,5	185,0	370,0	740,0	1480,0
sol	49,0	98,0	196,0	392,0	784,0	1568,0
sol # / *la* b	51,9	103,8	207,7	415,3	830,6	1661,2
la	55,0	110,0	220,0	440,0	880,0	1760,0
la # / *si* b	58,3	116,5	233,1	466,2	932,3	1864,6
si	61,7	123,5	246,9	493,9	987,8	1975,6

Exemple de lecture dans ce tableau : le la de l'octave 3 (noté la_3) a une fréquence de 440,0 Hz. Sinon, b signifie «bémol» et # «dièse» ; par exemple, la fréquence d'un si bémol de l'octave 2 (noté *si* b_2) est de 233,1 Hz.

(D'après bac S Amérique du sud 2016)

Document P1-3 - Niveau d'intensité sonore

Le niveau d'intensité sonore L s'exprime en dB (décibel) et est tel que $L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ avec $I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2} le seuil d'audibilité et I (en W.m^{-2}) l'intensité du signal reçu par l'oreille.

(D'après TS Physique Chimie Collection Dulaurans Duruphty Hachette)

Document P1-4 - Quelques logarithmes décimaux

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log(x)$	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1

Question 16 :

En accord avec le document P1-1, la célérité du son dans l'air, dans les conditions normales d'utilisation du trombone est comprise

- **A -** Entre 150 m.s^{-1} et 190 m.s^{-1}
- **B -** Entre 320 m.s^{-1} et 360 m.s^{-1}
- **C -** Entre 700 m.s^{-1} et 740 m.s^{-1}
- **D -** Entre 2.8×10^{8} m.s^{-1} et 3.2×10^{8} m.s^{-1}

Question 17 :

Le document P1-1 dit que la longueur du trombone est définie à partir d'un son fondamental, le si bémol de 116,5 vibrations simples. Si on note λ la longueur d'onde de ce son, la longueur du trombone est égale à :

A - $\dfrac{\lambda}{2}$
B - λ
C - $\dfrac{3\lambda}{2}$
D - 2λ

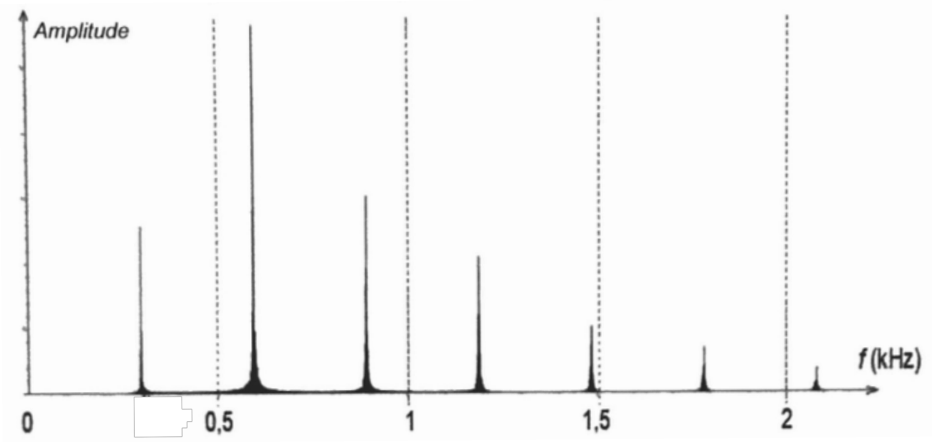
Question 18 :

Parmi les notes suivantes , une et une seule ne peut pas être émise par un trombone :

A - sol_0
B - $ré_1$
C - sol_1
D - $ré_2$

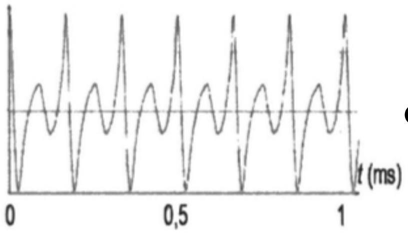
Question 19 :

On considère ci-dessous le spectre d'un son émis par le trombone :

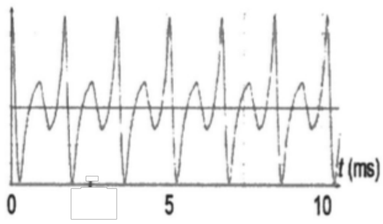


Parmi les signaux sonores suivants, ce spectre correspond à :

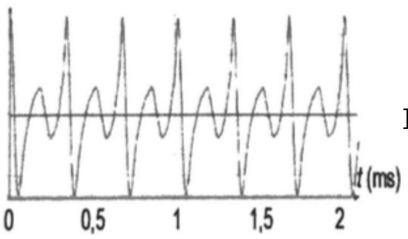
A -



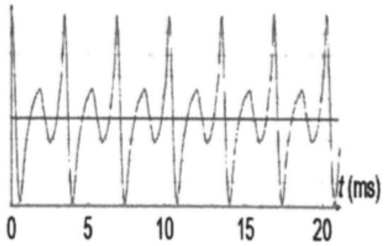
C -



B -



D -



Question 20 :

Ce son correspond à la note (une et une seule réponse exacte parmi les suivantes) :

A - $r\acute{e}_1$

B - $r\acute{e}_2$

C - $r\acute{e}_3$

D - $r\acute{e}_4$

Question 21 :

Les sept notes les plus graves qu'un trombone alto peut sortir vont du la_0 au mi b_1. Par rapport au trombone ténor, la longueur de cet instrument est donc :

A - $\dfrac{19,5}{58,3} \simeq 33$ % plus courte

B - $\dfrac{19,5}{77,8} \simeq 25$ % plus courte

C - $\dfrac{19,5}{77,8} \simeq 25$ % plus longue

D - $\dfrac{19,5}{58,3} \simeq 33$ % plus longue

Question 22 :

A 20 m de distance, le niveau d'intensité sonore créé par un trombone est de 90 dB. Avec trois trombones dans les mêmes conditions, on atteint un niveau d'intensité sonore

A - entre 90 dB et 100 dB

B - entre 100 dB et 200 dB

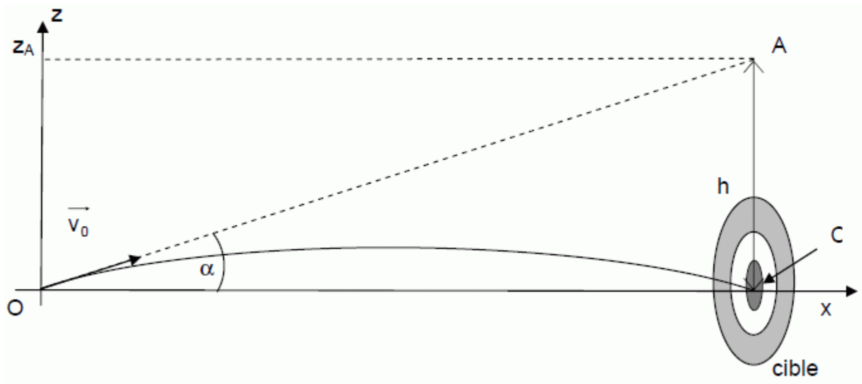
C - entre 200 dB et 300 dB

D - entre 300 dB et 400 dB

Partie P2 : Dynamique newtonienne

Document P2-1 - Tir à l'arc

Sur les cibles de tir à l'arc se trouvent un disque central de 10 cm de diamètre. A 70m, l'archer le voit sous un angle de moins d'un dixième de degrés, et doit ajuster la position de la corde et de ses mains au millimètre près [...]. Dans quelle direction, la flèche tirée par l'archer du point O doit-elle partir pour parvenir au centre C de la cible ? La résistance de l'air a ici peut d'effet. La trajectoire de la flèche est à peu près balistique, c'est à dire de forme parabolique.



La flèche est assimilée à un point matériel de masse m évoluant dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Sur la figure ci-dessus, le champ de pesanteur $\vec{g}$ est parallèle à l'axe (Oz) et sa norme est $g = 9,81$ m.s^{-2}.

(D'après «Le monde a ses raisons» de Jean-Michel Courty et Edouard Kierlik)

Question 23 :

Par rapport à la figure du document P2-1, t étant le temps et $\vec{\mathrm{v}_0}$ la vitesse à $t = 0$, l'équation horaire de la trajectoire de la flèche est

A - $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & (\mathrm{v}_0 \sin(\alpha))\, t \\ z & = & -\dfrac{1}{2} g t^2 + (\mathrm{v}_0 \cos(\alpha))\, t \end{array}\right.$

B - $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & (\mathrm{v}_0 \cos(\alpha))\, t \\ z & = & -\dfrac{1}{2} g t^2 + (\mathrm{v}_0 \sin(\alpha))\, t \end{array}\right.$

C - $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & (\mathrm{v}_0 \sin(\alpha))\, t \\ z & = & \dfrac{1}{2} g t^2 + (\mathrm{v}_0 \cos(\alpha))\, t \end{array}\right.$

D - $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & (\mathrm{v}_0 \cos(\alpha))\, t \\ z & = & \dfrac{1}{2} g t^2 + (\mathrm{v}_0 \sin(\alpha))\, t \end{array}\right.$

Question 24 :

L'équation de la trajectoire de la flèche est alors

A - $z = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{\mathrm{v}_0\cos(\alpha)} + x\tan(\alpha)$

B - $z = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{\mathrm{v}_0\cos(\alpha)} + x\tan(\alpha)$

C - $z = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{\mathrm{v}_0^2\cos^2(\alpha)} + x\tan(\alpha)$

D - $z = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{\mathrm{v}_0^2\cos^2(\alpha)} + x\tan(\alpha)$

Question 25 :

Soit h la hauteur du point A défini sur le document P2-1. Si on prend une énergie potentielle de pesanteur nulle au point O, l'énergie mécanique de la flèche

A - est constante et égale à $-mgh$

B - est constante et égale à mgh

C - est constante et égale à $\frac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2$

D - diminue tout au long du mouvement

Question 26 :

La hauteur maximale atteinte par la flèche est

A - $z_{\mathrm{max}} = \frac{\mathrm{v}_0^2\sin(\alpha)}{2g}$

B - $z_{\mathrm{max}} = \frac{\mathrm{v}_0^2\cos(\alpha)}{2g}$

C - $z_{\mathrm{max}} = h\sin(\alpha)$

D - $z_{\mathrm{max}} = h\cos(\alpha)$

Question 27 :

Dans le cas où la flèche atteint le centre de la cible C, la durée t_{V} de vol de la flèche vérifie :

A - $h = \mathrm{v}_0 t_{\mathrm{V}}$

B - $h = \mathrm{v}_0\cos(\alpha)t_{\mathrm{V}}$

C - $h = \mathrm{v}_0\sin(\alpha)t_{\mathrm{V}}$

D - $h = \frac{1}{2}gt_{\mathrm{V}}^2$

Question 28 :

Si on note D la distance entre O et le centre de la cible C, la flèche atteindra C pourvu que :

A - $\cos(2\alpha) = \dfrac{gD}{\mathrm{v}_0^2}$

B - $\sin(2\alpha) = \dfrac{gD}{\mathrm{v}_0^2}$

C - $\cos^2(\alpha) = \dfrac{gD}{\mathrm{v}_0^2}$

D - $\sin^2(\alpha) = \dfrac{gD}{\mathrm{v}_0^2}$

Partie P3 : Relativité restreinte

Question 29 :

Dans un référentiel terrestre un électron animé d'un mouvement rectiligne et uniforme parcourt une distance de 10,0 m en 100 ns. On rappelle que le coefficient de dilatation temporelle (rapport entre une durée quelconque et la durée correspondant dans un référentiel propre) est $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$, c étant la célérité d'une onde magnétique dans le vide.

La vitesse de l'électron dans le référentiel terrestre est

A - comprise entre 10 m.s^{-1} et 10^3 m.s^{-1}

B - comprise entre 10^4 m.s^{-1} et 10^6 m.s^{-1}

C - comprise entre 10^7 m.s^{-1} et 10^9 m.s^{-1}

D - comprise entre 10^{10} m.s^{-1} et 10^{12} m.s^{-1}

Question 30 :

Dans un référentiel lié à l'électron, la durée de parcours est

A - comprise entre 70 ns et 90 ns

B - comprise entre 90 ns et 100 ns

C - comprise entre 100 ns et 110 ns

D - comprise entre 110 ns et 130 ns