Épreuve 2021
**Mathématiques**
(concours ENAC EPL/S)

# Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques du concours EPL/S 2021.

# Consignes

La durée de l'épreuve est de 2h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

**Le candidat doit choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.**

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité n'est appliquée.

**Toutes les questions sont indépendantes les unes des autres**

**Question 1 :**

$i$ désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. Nous considérons le nombre complexe $z = 1 - \tan^2(\alpha) + 2\tan(\alpha) \times i$, où $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}; 0\right[$. Nous démontrons alors que :

**A -** $\mathrm{Re}(z) \leqslant 0$

**B -** $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$, avec $k$ entier relatif

**C -** $\mathrm{Re}(z) = \left[1 + \tan^2(\alpha)\right] \times \cos(\alpha)$

**D -** $\mathrm{Im}(z) = \left[1 + \tan^2(\alpha)\right] \times \sin(2\alpha)$

**Question 2 :**

Si l'écriture décimale d'un nombre $n$ se termine par 5, alors celle de $n^2$ se termine par :

**A -** 5

**B -** 25

**C -** 125

**D -** 05

**Question 3 :**

$i$ désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. Les imaginaires purs sont les nombres complexes de la forme $ai$ , $a$ étant un nombre réel.

**A -** Il existe un unique entier relatif $k$ tel que $(-1 + \sqrt{3}i)^k$ soit un imaginaire pur.

**B -** Il existe exactement deux entiers relatifs $k$ tels que $(-1 + \sqrt{3}i)^k$ soit un imaginaire pur.

**C -** Il existe une infinité d'entiers relatifs $k$ tel que $(-1 + \sqrt{3}i)^k$ soit un imaginaire pur.

**D -** Il n'existe pas d'entier relatif $k$ tel que $(-1 + \sqrt{3}i)^k$ soit un imaginaire pur.

**Question 4 :**

Soit la fonction $F$ définie sur l'ensemble des nombres réels positifs par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$. L'équation $F(x) = 100$ admet exactement :

**A -** 3 solutions

**B -** 2 solutions

**C -** 1 solution

**D -** 0 solution

**Question 5 :**

Un concours propose un QCM comportant 4 questions. Pour chacune des questions, 3 réponses sont proposées et une seule est exacte. Un candidat répond au hasard. La probabilité pour qu'il donne au moins une réponse exacte vaut :

**A -** $\dfrac{81}{256}$

**B -** $\dfrac{175}{256}$

**C -** $\dfrac{16}{81}$

**D -** $\dfrac{65}{81}$

**Question 6 :**

Nous considérons un pentagone régulier. Soit $\Delta$ l'ensemble des droites passant par deux sommets. Nous appelons diagonale toute droite passant par deux sommets non consécutifs. Nous avons alors :

**A -** Les droites de $\Delta$ se coupent en 20 points autres que les sommets.

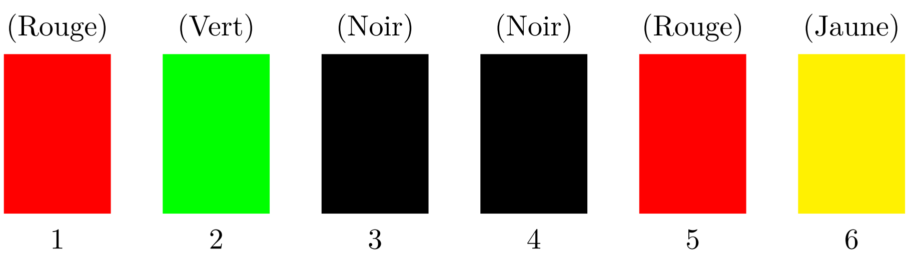
**B -** $\Delta$ contient exactement 20 éléments.

**C -** Les diagonales sont au nombre de 10.

**D -** Les triangles formés par trois sommets du pentagone sont au nombre de 20.

**Question 7 :**

Nous considérons un ensemble de 6 plaques rectangulaires numérotées de 1 à 6. Chacune des deux faces d'une plaque est peinte d'une couleur choisie aléatoirement parmi les 4 couleurs suivantes : noir, rouge, vert et jaune. Nous disposons les 6 plaques sur la table (une seule face est donc apparente) :




Nous pouvons retourner une ou plusieurs plaques. Nous considérons les énoncés suivants :
($i$) si une plaque est rouge d'un côté, alors elle est verte de l'autre.
($ii$) pour qu'une plaque soit noire d'un côté, il suffit qu'elle soit jaune de l'autre.

**A -** Pour savoir si ($i$) est vrai, il suffit de retourner les plaques 1, 3, 4, 5 et 6.

**B -** Pour savoir si ($i$) est vrai, il faut retourner les plaques 1, 2 et 5.

**C -** Pour savoir si ($ii$) est vrai, il faut retourner les plaques 3, 4 et 6.

**D -** Pour savoir si ($ii$) est vrai, il suffit de retourner la plaque 6.

**Question 8 :**

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ la droite $(d)$ d'équation $\sqrt{3}x + y = 2$,

**A -** n'admet aucun point d'intersection avec le cercle $(C)$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$.
**B -** admet un point d'intersection avec le cercle $(C)$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$.
**C -** admet deux points d'intersection avec le cercle $(C)$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$.
**D -** passe par le point $O$.

**Question 9 :**

L'intégrale $\int_0^{\pi} t^2 \cos(t)\, \mathrm{d}t$ est égale à :

**A -** $\pi$
**B -** $-\pi$
**C -** $2\pi$
**D -** $-2\pi$

**Question 10 :**

Soit $\alpha$ une racine de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Alors nous avons :

**A -** $\alpha^5 = 5\alpha + 1$
**B -** $\alpha^5 = 5\alpha + 2$
**C -** $\alpha^5 = 5\alpha + 3$
**D -** $\alpha^5 = 5\alpha + 4$

**Question 11 :**

Un client achète une marchandise, alors :

**A -** Il est financièrement toujours plus intéressant de demander une réduction de 10% du prix d'une marchandise que de demander une augmentation de 10% de la quantité de la marchandise.
**B -** Il est financièrement toujours plus intéressant de demander une augmentation de 10% de la quantité de la marchandise que de demander une réduction de 10% du prix d'une marchandise.
**C -** Il est financièrement toujours équivalent de demander une réduction de 10% du prix d'une marchandise que de demander une augmentation de 10% de la quantité de la marchandise.
**D -** Il est financièrement parfois plus intéressant de demander une réduction de 10% du prix d'une marchandise que de demander une augmentation de 10% de la quantité de la marchandise et parfois c'est l'inverse.

**Question 12 :**

$|\cos(\pi x)|$ désigne la valeur absolue de $\cos(\pi x)$. La fonction $f$ définie par $f(x) = e^{-2x} \times |\cos(\pi x)|$ :

**A -** n'est pas continue en $\frac{1}{2}$
**B -** est continue en $\frac{1}{2}$
**C -** n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$
**D -** est dérivable en $\frac{1}{2}$

**Question 13 :**

Soit $J(x) = \int_0^x \sin^5(t) \times \cos(t)\, \mathrm{d}t$. Alors, $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} J(x)\, \mathrm{d}x$ est égale à :

**A -** $\dfrac{-15\pi + 44}{192}$

**B -** $\dfrac{15\pi - 44}{192}$

**C -** $\dfrac{-15\pi + 44}{1152}$

**D -** $\dfrac{15\pi - 44}{1152}$

**Question 14 :**

Soit la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout nombre entier $n$, $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$. Cette suite est :

**A -** divergente vers $+\infty$

**B -** convergente vers un nombre réel.

**C -** à termes positifs ou nul.

**D -** à termes négatifs.

**Question 15 :**

$A$ et $B$ sont deux événements qui vérifient :

$$\mathrm{P}(B) = 0,2\,;\ \mathrm{P}_B(A) = 0,3\,;\ \mathrm{P}_{\overline{B}}(A) = 0,4$$

Alors, la probabilité $\mathrm{P}(A \cup B)$ est égale à :

**A -** 0,51

**B -** 0,52

**C -** 0,53

**D -** 0,54

**Question 16 :**

Nous considérons trois figures géométriques de couleurs distinctes : un carré, un cercle et un losange qui sont rouge, vert ou bleu. Chaque couleur est attribuée une fois et une seule fois. Sachant que :
($i$) Si le carré est rouge alors le cercle est vert.
($ii$) Si le carré est vert alors le cercle est bleu.
($iii$) Si le cercle n'est pas rouge alors le losange est vert.
($i$v) Si le losange est bleu alors le carré est vert.
Alors, nous savons que :

**A -** Le cercle est bleu et le losange est vert.

**B -** Le carré est vert et le losange est rouge.

**C -** Le cercle est rouge et le losange est bleu.

**D -** Le cercle est vert et le losange est rouge.

**Question 17 :**

Nous désignons par $Y$ la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur par rapport à la banque. La loi de probabilité de $Y$ est donnée dans le tableau ci-dessous :

| Valeurs $Y$ | -10 | -7 | 0 | 3 | 12 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,15 | 0,25 | 0,20 | 0,20 | 0,15 | 0,05 |

Le jeu proposé est :

**A -** équitable.

**B -** favorable au joueur.

**C -** favorable à la banque.

**D -** inéquitable.

**Question 18 :**

Soient $x$ un nombre réel et $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Nous posons :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(x + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

Nous démontrons que $J_n(x)$ est :

**A -** nul

**B -** strictement positif

**C -** strictement négatif

**D -** de signe non constant

**Question 19 :**

Soient $x$ un nombre réel et $n$ un entier naturel non nul. Nous posons :

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left[\left(k + \frac{1}{2}\right) x\right]$$

Nous démontrons que $\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right] \times K_n(x)$ est :

**A -** strictement négatif

**B -** négatif ou nul

**C -** strictement positif

**D -** positif ou nul

**Question 20 :**

Nous considérons les deux équations différentielles suivantes, notées $(E_1)$ et $(E_2)$ :

$$(E_1) : xy' + (1-x)y = 1 \text{ définie sur l'intervalle } I_1 = ]-\infty; 0[$$
$$(E_2) : xy' + (1-x)y = 1 \text{ définie sur l'intervalle } I_2 = ]0; +\infty[$$

Nous supposerons que, si pour tout réel $x$, $y(x) = 0$, alors $(E_1)$ et $(E_2)$ ne sont pas vérifiées. Nous démontrons alors que :

**A -** Une solution de l'équation homogène $xy' + (1-x)y = 0$ sur les intervalles $I_1$ et $I_2$ sont les fonctions : $y = k\dfrac{e^x}{x}$, où $k$ est un nombre réel.

**B -** Les solutions de $(E_1)$ et $(E_2)$ sur respectivement les intervalles $I_1$ et $I_2$ sont les fonctions : $y = \dfrac{ke^x - 1}{x}$, où $k$ est un nombre réel.

**C -** La fonction qui à $x$ associe $\dfrac{ke^x - 1}{x}$ admet une limite finie en 0 si et seulement si $k = 1$.

**D -** La fonction qui à $x$ associe $\dfrac{ke^x - 1}{x}$ admet une limite finie en 0 si et seulement si $k = -1$.

**Question 21 :**

$p$ et $q$ désignent deux entiers naturels non nuls ; $p!$ désigne factorielle $p$. Nous notons :

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$$

Nous calculons $B(p,q)$ et nous trouvons alors :

**A -** $B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q)!}$

**B -** $B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q)!}{(p+q)!}$

**C -** $B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$

**D -** $B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q)!}{(p+q-1)!}$

**Question 22 :**

$n!$ désigne factorielle $n$ ; $15\,!$ admet :

**A -** 396 diviseurs

**B -** 4032 diviseurs

**C -** 1008 diviseurs

**D -** 672 diviseurs

**Question 23 :**

Le reste de la division par 13 du nombre $100^{1000}$ est :

**A -** 9

**B -** 10

**C -** 11

**D -** 12

**Question 24 :**

Dans l'ensemble des nombres complexes, nous définissons la relation d'équivalence $R$ par : $zRz'$ si et seulement si $|z| = |z'|$. La classe d'équivalence de chaque nombre complexe $z$ est :

**A -** l'ensemble des cercles de rayon $|z|$.

**B -** l'ensemble des cercles de centre $O$.

**C -** le cercle de centre $O$ et de rayon $|z|$.

**D -** l'ensemble des nombres complexes $u$ tels que $|u| = |z|$.

**Question 25 :**

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ désignent l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres réels. Nous avons alors :

**A -** La famille de $\mathbb{R}^4$, $(e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (3, 0, 1, -2), e_2 = (1, 5, 0, -1), e_3 = (7, 5, 2, 1)$ est libre.

**B -** La famille de $\mathbb{R}^4$, $(e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (3, 0, 1, -2), e_2 = (1, 5, 0, -1), e_3 = (7, 5, 2, 1)$ est liée.

**C -** $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

**D -** $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille liée du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

**Question 26 :**

Soient $a, b$ et $c$ trois nombres réels et $M$ la matrice définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$

**A -** Si les nombres $a, b$ et $c$ sont tous distincts alors $rg(M) = 3$.

**B -** Si les nombres $a, b$ et $c$ sont tous distincts alors $rg(M) = 2$.

**C -** Si les nombres $a, b$ et $c$ sont tels que : $b = c \neq a$ ou $a = c \neq b$ ou $a = b \neq c$ alors $rg(M) = 3$.

**D -** Si les nombres $a, b$ et $c$ sont tels que : $b = c \neq a$ ou $a = c \neq b$ ou $a = b \neq c$ alors $rg(M) = 2$.

**Question 27 :**

$k$ et $k'$ étant deux nombres entiers relatifs, l'ensemble $S$ des solutions réelles de l'équation $2^{4\cos^2(x)+1} + 16 \times 2^{4\sin^2(x)-3} = 20$, est :

**A -** $S = \left\{ \left( \frac{\pi}{6} + k \times \frac{\pi}{2} \right) \cup \left( \frac{\pi}{3} + k' \times \frac{\pi}{2} \right) \right\}$

**B -** $S = \left\{ \left( \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \right) \cup \left( \frac{\pi}{3} + k' \times 2\pi \right) \right\}$

**C -** $S = \left\{ \left( \frac{\pi}{6} + k \times \pi \right) \cup \left( \frac{\pi}{3} + k' \times \pi \right) \right\}$

**D -** $S = \left\{ \left( \frac{\pi}{6} + k \times \frac{\pi}{4} \right) \cup \left( \frac{\pi}{3} + k' \times \frac{\pi}{4} \right) \right\}$

**Question 28 :**

Dans l'intervalle $[0; \pi]$, l'équation $\tan(x) + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0$ admet :

**A -** 7 solutions.

**B -** 8 solutions.

**C -** 9 solutions.

**D -** 10 solutions.

**Question 29 :**

La décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{2x^5 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2}$ est :

**A -** $2 - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{x-2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1}$

**B -** $2 + \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{x-2}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1}$

**C -** $2 + \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{x-2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1}$

**D -** $2 - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{x-2}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1}$

**Question 30 :**

Soit $f$ la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \sin^2(x)\right) \text{ si } x \text{ n'est pas nul et } f(0) = 0$$

**A -** $f$ n'est pas dérivable en 0.

**B -** $f$ est continue en 0.

**C -** $f$ est périodique de période $\pi$.

**D -** $f$ n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

**Question 31 :**

Pour tout entier naturel non nul $n$, nous posons :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^n)^2}\,\mathrm{d}t$$

Nous démontrons que la suite $(I_n)$ :

**A -** n'est pas bornée.

**B -** est décroissante

**C -** admet 1 pour limite en $+\infty$.

**D -** n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

**Question 32 :**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

Nous démontrons alors que :

**A -** pour tout entier naturel $n$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

**B -** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

**C -** la suite $(v_n)$ définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

**D -** la suite $(v_n)$ définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite constante.

**Question 33 :**

Soit la fonction $f$ définie, pour tout nombre réel $x$ différent de 1, par : $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et soit $C_f$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé. Nous démontrons que :

**A -** $C_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(1; 0)$.

**B -** $C_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(1; 1)$.

**C -** $C_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(1; 2)$.

**D -** $C_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(1; 3)$.

**Question 34 :**

$\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ est égale à :

**A -** 1

**B -** $e^{-\frac{1}{6}}$

**C -** $e^{\frac{5}{6}}$

**D -** $e^{\frac{1}{6}}$

**Question 35 :**

L'assertion est vraie :

**A -** Si une suite numérique $(u_n)$ est telle que pour tout entier naturel $n$, $u_n$ est non nul et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors cette suite est croissante.

**B -** Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, nous avons : $n^3 \geqslant 3^n$.

**C -** Soit une suite numérique $(v_n)$ telle que, pour tout entier naturel $n$, nous ayons : $v_{n+1} - v_n > 0,1$. La suite $(v_n)$ converge vers 0.

**D -** Soient deux suites $(w_n)$ et $(x_n)$ définies pour tout entier naturel $n$ par : $w_0 = 1, w_{n+1} = w_n - 2$ et $x_n = e^{w_n}$. La suite $(x_n)$ converge vers 0.

**Question 36 :**

$A$ et $B$ sont deux évènements qui vérifient :

$$\mathrm{P}(A) = \frac{3}{5};\ \mathrm{P}_A(B) = \frac{1}{4};\ \mathrm{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{1}{5} \text{ et } \mathrm{P}(B) \text{ est non nul.}$$

Alors, la probabilité $\mathrm{P}(B)$ est égale à :

**A -** $\frac{47}{100}$

**B -** $\frac{57}{100}$

**C -** $\frac{67}{100}$

**D -** $\frac{37}{100}$