Épreuve 2022
Mathématiques
(concours ENAC EPL/S)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques du concours EPL/S 2022.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 2h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Le candidat doit choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité n'est appliquée.

Questions liées

1 à 7
8 à 18
19-20
21 à 25
27 à 29
31 à 33
35-36

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ désignent respectivement les ensembles des réels, des complexes, des rationnels, des entiers naturels et des entiers relatifs.
On rappelle que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ où i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et x est un nombre réel.
$\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

PARTIE I

Pour tout n entier vérifiant $n \geqslant 2$ on définit les suites x_n et y_n par :

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ et } y_n = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Question 1 :

On peut établir :

A - $x_n = 2 + \sum_{p=2}^{n} \frac{(n-p)!}{p!n^p}$

B - $x_n = 2 + \sum_{p=2}^{n} \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!n^p}$

C - $x_n = 2 + \sum_{p=2}^{n} \frac{p!}{(n-p)!n^p}$

D - $x_n = 2 + \sum_{p=2}^{n} \frac{n!}{p(n-p)!n^p}$

Question 2 :

Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout entier $p \in \{2, 3, ..., n\}$, on a l'inégalité :

A - $\frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!n^p} \leqslant \frac{(n+1)n...(n+1-p+1)}{p!(n+1)^p}$

B - $\frac{n!}{p(n-p)!n^p} \leqslant \frac{(n+1)!}{(p+1)(n+1-p+1)!(n+1)^p}$

C - $\frac{p!}{(n-p)!n^p} \geqslant \frac{(p+1)!}{(n+1-p+1)!(n+1)^p}$

D - $\frac{n!}{p(n-p)!n^p} \geqslant \frac{(n+1)!}{(p+1)(n+1-p+1)!(n+1)^p}$

Question 3 :

On peut ainsi en déduire que :

A - Pour tout entier $n > 2$, la suite x_n est croissante.

B - Pour tout entier $n > 2$, la suite x_n est décroissante.

C - Pour tout entier $n > 2$, la suite x_n n'est ni croissante, ni décroissante.

D - Il existe un entier $k > 2$ tel que la suite (x_n) soit décroissante pour $n < k$, puis croissante pour $n > k$.

Question 4 :

On établit que :

A - Pour tout entier $p \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{p!} \leqslant \dfrac{1}{2^{p+1}}$

B - Pour tout entier $p \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{p!} \geqslant \dfrac{1}{2^{p-1}}$

C - Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $0 \leqslant x_n \leqslant y_n < 3$

D - Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $0 \leqslant y_n \leqslant x_n < 3$

Question 5 :

Des résultats précédents, on déduit :

A - La suite x_n diverge vers $+\infty$.

B - La suite x_n n'admet pas de limite.

C - La suite x_n converge vers $\overline{x} = 3$.

D - La suite x_n converge vers une limite $\overline{x} < 3$.

Question 6 :

Pour tout entier $k \geqslant 2$ et tout entier $n \geqslant k$, on peut établir que :

A - $x_n \geqslant 2 + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + ... + \dfrac{1}{k}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \times ... \times \left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right)$

B - $x_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{2!}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + ... + \dfrac{1}{k!}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \times ... \times \left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right)$

C - $x_n \geqslant 2 + \dfrac{1}{2!}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + ... + \dfrac{1}{k!}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \times ... \times \left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right)$

D - $x_n \geqslant 2 + \dfrac{1}{2!}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + ... + \dfrac{1}{k!}\left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right)$

Question 7 :

Ainsi, on en déduit :

A - La suite y_n diverge vers $+\infty$.

B - La suite y_n converge vers $\overline{y} = \overline{x}$.

C - La suite y_n converge vers $\overline{y} = 3$.

D - La suite y_n converge vers une limite $\overline{y} > \overline{x}$.

PARTIE II

On désigne par $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On note I_2 la matrice carrée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, O_2 la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et pour tout $(i,j) \in (\{1,2\})^2$, $M_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à l'intersection de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne qui vaut 1.
L'ensemble de $GL_2(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constitué des matrices inversibles.
L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans lui même est noté $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$. L'application identité de $\mathbb{R}^2$ est notée Id.

Question 8 :

On peut montrer que :

A - $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

B - $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$.

C - Quelles que soient les matrices M et N de $GL_2(\mathbb{R})$, la somme $M+N$ appartient à $GL_2(\mathbb{R})$.

D - Quelles que soient les matrices M et N de $GL_2(\mathbb{R})$, le produit $M \times N$ appartient à $GL_2(\mathbb{R})$.

Question 9 :

Pour tout $i,j,k,l \in \{1,2\}$, on a : :

A - $M_{i,j} \times M_{k,l} = M_{k,j}$ si $i=j=k$ et $M_{i,j} \times M_{k,l} = O_2$ sinon

B - $M_{i,j} \times M_{k,l} = M_{k,l}$ si $i=k=l$ et $M_{i,j} \times M_{k,l} = O_2$ sinon

C - $M_{i,j} \times M_{k,l} = M_{j,l}$ si $i=j=l$ et $M_{i,j} \times M_{k,l} = O_2$ sinon

D - $M_{i,j} \times M_{k,l} = M_{k,l}$ si $j=k=l$ et $M_{i,j} \times M_{k,l} = O_2$ sinon

On note $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et $R = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Question 10 :

Par calcul, on obtient :

A - $S^2 = I_2$ et ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $S^n = I_2$

B - Pour tout $n \geqslant 2$, $S^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

C - $R^2 = R$ et ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $R^n = R$

D - $R^4 = R$ et ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $l \in \{0,1,2\}$, on a $R^{3k+l} = R^l$

Question 11 :

On pose $G_1 = \{I_2, S\}$ et $G_2 = \{I_2, R, R^2\}$:

A - Quelles que soient les matrices M et N de G_1, la somme $M + N$ appartient à G_1.

B - Quelles que soient les matrices M et N de G_2, la somme $M + N$ appartient à G_2.

C - Quelles que soient les matrices M et N de G_1, le produit $M \times N$ appartient à G_1.

D - Quelles que soient les matrices M et N de G_2, le produit $M \times N$ appartient à G_2.

Les ensembles $V(G_1)$ et $V(G_2)$ désignent respectivement les sous-espaces vectoriels engendrés par G_1 et G_2.

Question 12 :

On montre que :

A - $V(G_1)$ est de dimension 1

B - $V(G_1)$ est de dimension 2

C - $V(G_1)$ est de dimension 3

D - $V(G_1)$ est de dimension 4

Question 13 :

On montre que :

A - $V(G_2)$ est de dimension 1

B - $V(G_2)$ est de dimension 2

C - $V(G_2)$ est de dimension 3

D - $V(G_2)$ est de dimension 4

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul fixé de $\mathbb{R}^2$, on pose :
$H = \left\{\varphi \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right), \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) \in \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{u}\right\}$.

Question 14 :

L'ensemble H vérifie :

A - H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

B - H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$

C - H est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

D - H est un sous-espace affine de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ indépendant de $\overrightarrow{u}$, on appelle p la projection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R} \cdot \overrightarrow{u}$ parallèlement à $\mathbb{R} \cdot \overrightarrow{v}$, et q la projection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R} \cdot \overrightarrow{u}$ parallèlement à $\mathbb{R} \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$.

Question 15 :

La matrice de p dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est :

A - $M_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

B - $M_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

C - $M_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D - $M_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 16 :

La matrice de q dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est :

A - $M_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

B - $M_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

C - $M_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D - $M_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 17 :

Ainsi, on peut montrer que :

A - H est de dimension 1

B - H est de dimension 2

C - H est de dimension 3

D - H est de dimension 4

Question 18 :

Le déterminant $\begin{vmatrix} b & d-a & 0 \\ -c & 0 & a-d \\ 0 & -c & b \end{vmatrix}$ vaut :

A - b

B - $bc(a-d)$

C - 0

D - $2bc(a-d)$

PARTIE III

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés ; pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

Question 19 :

On tire un dé au hasard parmi les 100 dés, et en le lançant on obtient le chiffre 6. La probabilité que ce dé soit pipé vaut :

A - $\dfrac{1}{4}$

B - $\dfrac{1}{8}$

C - $\dfrac{1}{3}$

D - $\dfrac{1}{2}$

Question 20 :

On tire un dé au hasard parmi les 100 dés, et en le lançant n fois on obtient n fois le chiffre 6. La probabilité que ce dé soit pipé vaut :

A - $\dfrac{1}{2^{n+2}}$

B - $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^{n-1}}}$

C - $\dfrac{1}{3^n}$

D - $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{6^n}$

On définit le sous-ensemble $T \subset \mathbb{R}^2$ par le système d'inéquations :

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y - 1 < 0 \end{cases}$$

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires uniformes sur T. Pour $K \subset \mathbb{R}^2$, on définit la fonction indicatrice $\mathbb{1}_K$ par :

$$\mathbb{1}_K(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x, y) \in K \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

et pour $I \subset \mathbb{R}$, on définit la fonction $\mathbb{1}_I$ par :

$$\mathbb{1}_I(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in I \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Question 21 :

La densité $p_{(X,Y)}$ du couple (X,Y) est donnée par :

A - $p_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{1}_T(x,y)$

B - $p_{(X,Y)}(x,y) = \dfrac{1}{2} \times \mathbb{1}_T(x,y)$

C - $p_{(X,Y)}(x,y) = xy \times \mathbb{1}_T(x,y)$

D - $p_{(X,Y)}(x,y) = (1-x)y \times \mathbb{1}_T(x,y)$

Question 22 :

La densité marginale p_X de X est donnée par :

A - $p_X(x) = (1-x) \times \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

B - $p_X(x) = \dfrac{1}{2}(1-x) \times \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

C - $p_X(x) = 2(1-x) \times \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

D - $p_X(x) = x \times \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

Question 23 :

On en déduit que la densité marginale p_Y de Y vaut :

A - $p_Y(y) = y \times \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$

B - $p_Y(y) = (1-y) \times \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$

C - $p_Y(y) = \dfrac{1}{2}(1-y) \times \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$

D - $p_Y(y) = 2(1-y) \times \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$

Question 24 :

Les variables aléatoires X et Y :

A - sont indépendantes car $p_{(X,Y)}(x,y) = p_X(x) \times p_Y(y)$

B - sont indépendantes car pour tous $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$, on a :
$P(X \in I, Y \in J) = (P(X \in I)P(Y \in J)$

C - ne sont pas indépendantes car T n'est pas symétrique par rapport à ses coordonnées x et y

D - ne sont pas indépendantes car il existe $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ tels que : $P(X \in I, Y \in J) \neq (P(X \in I)P(Y \in J)$

Question 25 :

Un calcul donne :

- **A -** $E(XY) = \dfrac{1}{3}$
- **B -** $E(XY) = \dfrac{1}{4}$
- **C -** $E(XY) = \dfrac{1}{9}$
- **D -** $E(XY) = \dfrac{1}{12}$

PARTIE IV

Question 26 :

L'équation $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$

- **A -** n'admet aucune solution dans $\mathbb{Q}$,
- **B -** admet une seule solution dans $\mathbb{Q}$,
- **C -** admet deux solutions dans $\mathbb{Q}$,
- **D -** admet trois solutions dans $\mathbb{Q}$

Soit u_n la suite d'entiers définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 15$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$.

Question 27 :

On peut établir que :

- **A -** tout diviseur commun de u_n et de u_{n+1} divise aussi 5,
- **B -** tout diviseur commun de u_n et de u_{n+1} divise aussi 6,
- **C -** tout diviseur commun de u_n et de u_{n+1} divise aussi 15,
- **D -** u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

Question 28 :

On obtient alors :

- **A -** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2 divise u_n,
- **B -** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise u_n,
- **C -** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 5 divise u_n,
- **D -** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 6 divise u_n.

Question 29 :

Ainsi, $\text{PGCD}(u_n, u_{n+1})$ est constant et vaut :

- **A -** 1
- **B -** 2
- **C -** 5
- **D -** 6

Question 30 :

Les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise $3n-17$ sont :

A - 1,3,5,7
B - -3,3,5,11
C - -1,3,5,9
D - 2,3,5,6

PARTIE V

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = xe^{x^2}$

Question 31 :

La fonction f réalise une bijection de :

A - $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$
B - $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$
C - $\mathbb{R}^-$ dans $\mathbb{R}$
D - $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Question 32 :

Un développement limité d'ordre 4 de f en 0 est :

A - $f(x) = x + x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)$
B - $f(x) = x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)$
C - $f(x) = x + x^3 + o(x^4)$
D - $f(x) = x - x^3 + o(x^4)$

Question 33 :

Un développement limité d'ordre 4 de f^{-1} en 0 est :

A - $f^{-1}(x) = x + x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)$
B - $f^{-1}(x) = x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)$
C - $f^{-1}(x) = x + x^3 + o(x^4)$
D - $f^{-1}(x) = x - x^3 + o(x^4)$

PARTIE VI

Question 34 :

On vérifie que :

A - La décomposition de $P(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est :
$$P(X) = X^2\,(X-3)^2$$

B - La décomposition de $Q(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est :
$$Q(X) = \left(X^2 - 3X - 3i\right)\left(X^2 - 3X + 3i\right)$$

C - La décomposition de $Q(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est :
$$Q(X) = \left(X^2 - \left(2\sqrt{3}+3\right)X - 3\sqrt{3} + 6\right)\left(X^2 + \left(2\sqrt{3}-3\right)X + 3\sqrt{3} + 6\right)$$

D - La décomposition de $Q(X) = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est :
$$Q(X) = \left(X^2 - \left(2\sqrt{3}+3\right)X + 3\sqrt{3} + 6\right)\left(X^2 + \left(2\sqrt{3}-3\right)X - 3\sqrt{3} + 6\right)$$

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n ayant n racines réelles distinctes.

Question 35 :

On établit que :

A - Toutes les racines de $P^{'}$ sont réelles et distinctes,

B - Toutes les racines de $P^{'}$ sont réelles mais pas forcément distinctes,

C - Toutes les racines de $P^{'}$ sont distinctes, mais certaines peuvent être complexes conjuguées,

D - Les racines de P' ne sont ni forcément distinctes, ni forcément réelles.

Question 36 :

Le polynôme $P^2 + 1$:

A - n'admet que des racines réelles et distinctes

B - n'admet que des racines complexes non réelles et distinctes

C - n'admet que des racines distinctes, certaines étant réelles et d'autres complexes conjuguées,

D - peut admettre des racines multiples.