Épreuve 2021
Mathématiques & Physique
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2021.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 3h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

PARTIE MATHÉMATIQUES

Toutes les questions sont indépendantes

Question 1 :

Pour $x \in [0; 2\pi[$, l'ensemble S des solutions de l'inéquation $\cos(x) \leqslant -\cos(2x)$ est :

A - $S = \left[\dfrac{\pi}{3}; 2\pi\right]$

B - $S = \left[\dfrac{\pi}{6}; \pi\right]$

C - $S = \left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right]$

D - $S = \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{4\pi}{3}\right]$

Question 2 :

La solution de l'équation différentielle $15y' + 24y = 12$ avec $y\left(\dfrac{5}{4}\right) = 2$ est la fonction :

A - $f(x) = \dfrac{3}{2} \times e^{\left(-\frac{8}{5}x-2\right)} - \dfrac{1}{2}$

B - $f(x) = \dfrac{3}{2} \times e^{\left(-\frac{8}{5}x-2\right)} + \dfrac{1}{2}$

C - $f(x) = \dfrac{3}{2} \times e^{\left(-\frac{8}{5}x+2\right)} - \dfrac{1}{2}$

D - $f(x) = \dfrac{3}{2} \times e^{\left(-\frac{8}{5}x+2\right)} + \dfrac{1}{2}$

Question 3 :

Dans un repère orthonormé, nous considérons un héxagone régulier $ABCDEF$ de centre O, dont les côtés ont pour mesure de longueur 1. Le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CF}$ vaut :

A - $\sqrt{3}$

B - -3

C - $-\sqrt{3}$

D - $\dfrac{3}{2}$

Question 4 :

Une fonction g est définie sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 3}$.
Soit C_g sa courbe représentative dans un repère du plan.

A - C_g admet une asymptote d'équation $y = -1$.

B - C_g n'admet pas d'asymptote.

C - C_g admet une asymptote d'équation $y = x$.

D - C_g admet une asymptote d'équation $y = 1$.

Question 5 :

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

La fonction f'', dérivée seconde de f sur l'ensemble des nombres réels, est définie par :

A - $f''(x) = \displaystyle\int_0^x -2t \times e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

B - $f''(x) = \displaystyle\int_0^x -2x \times e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

C - $f''(x) = -2x \times e^{-x^2}$

D - $f''(x) = e^{-x^2}$

Question 6 :

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur l'ensemble des nombres entiers naturels :

A - Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 0$.

B - Si (u_n) converge vers un nombre réel non nul et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors la suite $(u_n \times v_n)$ ne converge pas vers une limite finie.

C - Si (u_n) converge vers un nombre réel non nul et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ admet $+\infty$ ou $-\infty$ comme limite.

D - Si (u_n) et (v_n) convergent, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers une limite finie.

Question 7 :

Dans un repère de l'espace, on considère les trois points $A(1;2;3)$, $B(-1;5;4)$, $C(-1;0;4)$. La droite parallèle à la droite (AB) passant par C a pour représentation paramétrique :

A - $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -t-1 \\ y & = & \dfrac{3}{2}t \\ z & = & \dfrac{1}{2}t+4 \end{array}\right.$, t étant un nombre réel.

B - $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1 \\ y & = & 4t \\ z & = & 7t+4 \end{array}\right.$, t étant un nombre réel.

C - $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1-2t \\ y & = & 5+3t \\ z & = & 4+t \end{array}\right.$, t étant un nombre réel.

D - $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t \\ y & = & -3t \\ z & = & -t \end{array}\right.$, t étant un nombre réel.

Question 8 :

$ABCDEFGH$ est un cube dont les faces $ABCD$ et $EFGH$ sont parallèles et de telle sorte que $[AE]$ et $[BF]$ soient deux arrêtes, avec E situé «au dessus» de A.
M est le centre de la face $ABFE$ et N est le centre de la face $BCGF$.
Les points I et J sont les milieux respectifs des arrêtes $[GH]$ et $[FG]$.
Les droites (IJ) et (MN) sont :

A - perpendiculaires

B - orthogonales

C - sécantes, non perpendiculaires

D - parralèles

Question 9 :

L'équation $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ admet dans l'ensemble des nombres réels :

A - 0 solution

B - 1 solution

C - 2 solutions

D - Plus de 2 solutions

Question 10 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Soient f et g les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x} \times \cos(4x) \text{ et } g(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$$

Les points communs aux deux courbes représentatives de ces deux fonctions ont pour abscisses :

A - $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}$, k étant un entier naturel,
ou $x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}$, k étant un entier naturel.

B - $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}$, k étant un entier naturel,
ou $x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}$, k étant un entier naturel non nul.

C - $x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}$, k étant un entier naturel,
ou $x = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}$, k étant un entier naturel non nul.

D - $x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}$, k étant un entier naturel,
ou $x = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2}$, k étant un entier naturel.

Question 11 :

Un joueur lance une fois un dé cubique bien équilibré.
Il gagne 10€ si le dé marque 1.
Il gagne 1€ si le dé marque 2 ou 4.
Il ne gagne rien dans les autres cas.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
La variance de X est :

A - 2

B - 12

C - 16

D - 17

Question 12 : **Suite téléscopique**

Soit n un entier naturel non nul.
La limite de l'expression $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$ est :

A - 0

B - $\ln(2)$

C - $+\infty$

D - $-\ln(2)$

Question 13 : **Suite doublement téléscopique**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
La limite de l'expression $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$ est :

A - 0

B - $\ln(2)$

C - $+\infty$

D - $-\ln(2)$

Question 14 :

On jette deux dés cubiques non pipés, l'un bleu et l'autre rouge.
Les faces de chacun des dés sont numérotées de 1 à 6.
On note a le nombre de la face apparente du dé bleu et b celui du dé rouge.
Soit E l'équation du second degré dans l'ensemble des nombres réels :

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0$$

Identifiez la ou les affirmation(s) vraie(s) parmi les suivantes :

A - La probabilité que E ait une racine double est $\frac{1}{6}$.

B - La probabilité que E n'ait aucune racine réelle est égale à la probabilité que E ait deux racines réelles.

C - Si E a deux racines réelles distinctes, la probabilité que l'une soit égale à 1 est $\frac{1}{3}$.

D - La probabilité que E ait une racine double paire est $\frac{1}{36}$.

Question 15 :

Une usine fabrique des vis de 2 cm de mesure de longueur.
On note X la variable aléatoire ayant pour valeurs les mesures de longueurs des vis possibles exprimée en cm, la probabilité p_i qu'une vis soit de longueur x_i.
On donne :

x_i	1,8	1,9	2	2,1	2,2
p_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

A - Si nous prélevons au hasard et avec remise 6 vis, la probabilité d'avoir au moins une vis de mesure de longueur 1,8 cm est $\left(\frac{1}{12}\right)^6$.

B - Si nous prélevons au hasard et avec remise 6 vis, la probabilité d'avoir exactement deux vis de mesure de longueur 1,8 cm est $6 \times \frac{11^4}{12^6}$.

C - Si nous prélevons au hasard et avec remise 6 vis, la probabilité d'avoir au moins une vis de mesure de longueur supérieure ou égale à 1,9 cm est $1 - \left(\frac{11}{12}\right)^6$.

D - Si l'on prélève au hasard une vis, la probabilité qu'elle soit au moins de 2 cm est $\frac{3}{4}$.

PARTIE PHYSIQUE

Questions liées :
16 à 23
24 à 27
28 à 30

Certaines questions demandent un calcul numérique. Si le calcul est trop complexe pour être effectué sans calculatrice, la réponse à la question pourra être trouvée à l'aide de l'évaluation de l'ordre de grandeur du résultat (voir document annexe à la fin du sujet).

Partie P1 (questions 16 à 23) : Mouvements d'un système

Document 1 - Distance parcourue en fonction de la vitesse

Soit un mobile ponctuel M se déplaçant le long d'une droite, toujours dans le même sens, avec une vitesse $\vec{v}$ variable (figure 1).
Si la valeur v de la vitesse $\vec{v}$ varie linéairement de v_1 à v_2 entre deux dates t_1 et t_2 (figure 2), la distance d parcourue par M entre ces deux dates est $d = \dfrac{(v_1 + v_2)(t_2 - t_1)}{2}$.

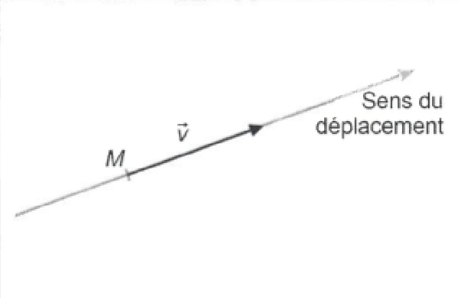


Figure 1

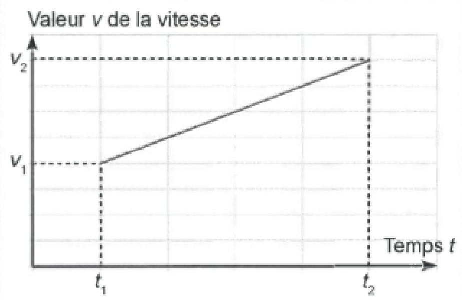


Figure 2

Document 2 - Intensité de la pesanteur
On considère dans toute la suite que sa valeur est constante et égale à $g = 9,8$ N.kg^{-1}.

Un lycéen emprunte régulièrement un ascenseur permettant d'aller du rez-de-chaussée au vingtième étage d'un immeuble en 20,0 s. Il remarque qu'il se sent plus lourd quand l'ascenseur se met en mouvement depuis le rez-de-chaussée mais qu'au contraire il se sent plus léger quand l'ascenseur ralentit avant l'arrêt au vingtième étage. Pour préciser cela, il réalise l'expérience suivante :

- L'ascenseur étant à l'arrêt au rez-de-chaussée, il y place une balance électronique. La balance affiche 0,0 g. Il place alors une masse sur le plateau de la balance qui affiche 100,0 g.
- L'ascenseur démarre. A l'aide d'un chronomètre, il constate que durant les 5,0 premières secondes de la montée, l'affichage de la balance se stabilise rapidement sur une valeur de 109,1 g ce qui correspond bien à la sensation d'être plus lourd.
- Durant les 10,0 s suivantes, l'affichage de la balance revient rapidement à une valeur de 100,0 g.
- Enfin, durant les 5,0 s avant l'arrivée au vingtième étage, l'affichage de la balance se stabilise rapidement sur une valeur de 90,9 g, ce qui correspond bien à la sensation de plus grande légèreté du lycéen.

Pour tenter d'interpréter ces résultats en termes de forces, le lycéen réalise l'expérience de la figure 3 :

- Il reprend la balance électronique précédente et vérifie qu'elle affiche bien 0,0 g lorsque le plateau est vide.
- Il place sur le plateau la masse précédente et vérifie que l'affichage est bien 100,0 g.
- Il relie à la masse un dynamomètre, dispositif permettant d'exercer sur la masse une force $\overrightarrow{F}_D$ verticale vers le haut, et on peut faire varier et mesurer F_D.

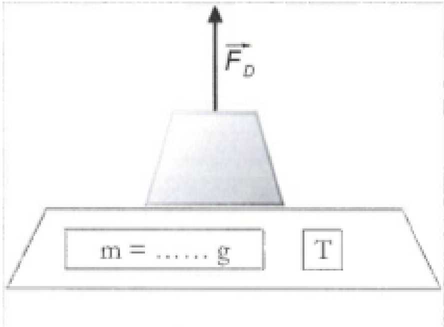


Figure 3

Dans cette deuxième expérience, le lycéen effectue la série de mesure suivante :

F_D (N)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Masse affichée (g)	100,0	89,8	79,6	69,4	59,2	49,0	38,8	28,6	18,5	8,3

Pour des valeurs de F_D supérieures à 0,9 N, la masse décolle du plateau.
On note $\overrightarrow{F}_B$ la force que le plateau de la balance exerce sur la masse.

Question 16 :

A - $\overrightarrow{F}_B$ est verticale vers le bas.

B - $\overrightarrow{F}_B$ est verticale vers le haut.

Dans l'expérience de la figure 3, quand $F_D = 0$, la valeur de $\overrightarrow{F}_B$ est :

C - $F_B = 0,98$ N

D - $F_B = 980$ N

Question 17 :

Dans l'expérience de la figure 3, quand $F_D = 0,7$ N :

A - $F_B = 0,28$ N

B - $F_B = 0,98$ N

C - $F_B = 979,3$ N

D - $F_B = 980$ N

Question 18 :

Dans l'expérience de la figure 3, quand $F_D = 0,7$ N, la valeur de la force totale subie par la masse est :

A - nulle

B - égale à 0,28 N

C - égale à 0,7 N

D - égale à 0,98 N

Question 19 :

Dans l'expérience de l'ascenseur, par rapport à un référentiel lié à la surface de la Terre, quand la balance affiche 109,1 g, la force totale subie par la masse a les propriétés suivantes :

A - elle est nulle

B - elle est vertical vers le bas

C - elle est vertical vers le haut

D - sa valeur est comprise entre 0,08 N et 0,09 N

A ce niveau, le lycéen connaît précisément les forces subies par la masse pendant la montée de la cabine de l'ascenseur. Il utilise alors le lien entre la variation du vecteur vitesse d'un système modélisé par un point matériel entre deux instants voisins et la somme des forces appliquées sur celui-ci, lien qu'il a étudié en physique en classe de première, pour en déduire l'évolution de la vitesse de la cabine de l'ascenseur par rapport à la surface de la Terre.

Question 20 :

Quand la balance affiche 109,1 g, si à un instant donné la vitesse de la cabine a une valeur de 1,0 m.s^{-1}, 0,5 s plus tard cette valeur devient comprise entre :

A - 0 m.s^{-1} et 0,3 m.s^{-1}

B - 0,3 m.s^{-1} et 1 m.s^{-1}

C - 1 m.s^{-1} et 3 m.s^{-1}

D - 3 m.s^{-1} et 10 m.s^{-1}

Question 21 :

Quand la balance affiche 90,9 g, si à un instant donné la vitesse de la cabine a une valeur de 1,0 m.s^{-1}, 0,5 s plus tard cette valeur devient comprise entre :

A - 0 m.s^{-1} et 0,3 m.s^{-1}

B - 0,3 m.s^{-1} et 1 m.s^{-1}

C - 1 m.s^{-1} et 3 m.s^{-1}

D - 3 m.s^{-1} et 10 m.s^{-1}

Le lycéen fait alors la synthèse de tous les résultats qu'il a obtenu et en déduit le graphe de la figure 4 représentant l'évolution de la valeur de la vitesse de la cabine de l'ascenseur en fonction du temps.

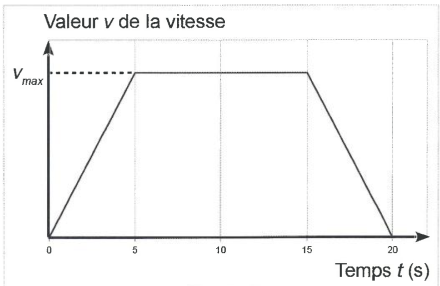


Figure 4

Question 22 :

Sur ce graphe, la valeur de v_{max} est comprise entre :

A - 6 m.s^{-1} et 20 m.s^{-1}

B - 20 m.s^{-1} et 60 m.s^{-1}

C - 60 m.s^{-1} et 200 m.s^{-1}

D - 200 m.s^{-1} et 600 m.s^{-1}

Question 23 :

La distance parcourue par la cabine de l'ascenseur est comprise entre :

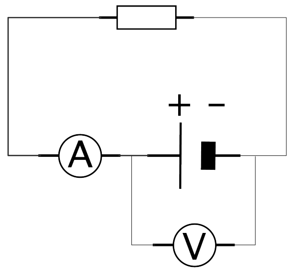
A - 10 m et 30 m
B - 30 m et 100 m
C - 100 m et 300 m
D - 300 m et 1000 m

Partie P2 (questions 24 à 27) : Aspects énergétiques des phénomènes électriques

On utilise le montage schématisé sur la figure 5 pour déterminer la caractéristique d'une source réelle de tension. En faisant varier la résistance R, on mesure à l'aide de l'ampèremètre et du voltmètre les grandeurs suivantes :

R (Ω)	1 000	700	300	100
Intensité (mA)	8,08	11,35	26,8	74,3
Tension (V)	8,32	8,29	8,13	7,66

On vérifie ainsi que cette source réelle est équivalente à une source idéale de tension E associée en série à une résistance R_S.



https://www.cours.jlrichter.fr/lycee/premiere-s/1sp-pc-14-etudes-energetiques-en-electricite/

Figure 5

Question 24 :

La résistance R_S est comprise entre

A - 2 Ω et 6 Ω
B - 6 Ω et 20 Ω
C - 20 Ω et 60 Ω
D - 60 Ω et 200 Ω

Question 25 :

La tension E est comprise entre :

A - 1 V et 2 V
B - 2 V et 5 V
C - 5 V et 10 V
D - 10 V et 20 V

Question 26 :

Quand la source réelle délivre 50,0 mA, elle fournit une puissance entre

A - 0,2 W et 0,6 W
B - 0,6 W et 2 W
C - 2 W et 6 W
D - 6 W et 20 W

Question 27 :

Si dans ces conditions, la source réelle fonctionne pendant 10 min, elle fournit une énergie comprise entre :

A - 3 J et 10 J

B - 10 J et 30 J

C - 30 J et 100 J

D - 100 J et 300 J

Partie P3 (questions 28 à 30) : La lumière : images

Document 3 - Relations pour une lentille mince

- Relation de conjugaison : $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}}$
- Grandissement : $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

où O est le centre optique de la lentille, $\overline{OF'}$ (ou f') la distance focale de la lentille, AB l'objet et $A'B'$ l'image de cet objet obtenue avec la lentille mince.

Question 28 :

On place un objet réel AB à 30,0 cm d'une lentille mince convergente. On obtient alors une image réelle $A'B'$ à une distance de 45,0 cm de l'objet AB. La distance focale de la lentille est donc comprise entre :

A - 6 mm et 2 cm

B - 2 cm et 6 cm

C - 6 cm et 20 cm

D - 20 cm et 60 cm

Question 29 :

Pour former avec cette lentille une image réelle d'un objet réel avec un grandissement de -4, il faut placer la lentille entre :

A - 6 cm et 10 cm de l'objet

B - 10 cm et 20 cm de l'objet

C - 20 cm et 30 cm de l'objet

D - 30 cm et 60 cm de l'objet

Question 30 :

Dans un programme en Python permettant de faire des calculs en optique géométrique, on trouve la fonction suivante :

```
def calcule (x1, x2) :
     unsurr = 1 / x1 + 1 / x2
     r = 1 / unsurr
     return r
```

Cette fonction permet de calculer :

A - $\overline{OA'}$ en fonction de la distance focale de la lentille et de $\overline{OA}$

B - la distance focale de la lentille en fonction de $\overline{OA}$ et de $\overline{OA'}$

C - $\overline{OA}$ en fonction de la distance focale de la lentille et de $\overline{OA'}$

D - la distance entre un objet et son image

Document annexe - Exemple d'évaluation de l'ordre de grandeur du résultat d'un calcul numérique

Soit une valeur de force F pour laquelle on sait que sa valeur en Newton est :

$$F = 8,99 \times 10^9 \times \frac{8,48 \times 10^{-18} \times 1,60 \times 10^{-19}}{(1,65 \times 10^{-10})^2}$$

On demande si une valeur est comprise entre :

A - 10^{-7} N et 3×10^{-7} N

B - 3×10^{-7} N et 10^{-6} N

C - 10^{-6} N et 3×10^{-6} N

D - 3×10^{-6} N et 10^{-5} N

Une première approche consiste à remplacer chaque paramètre par sa puissance de 10 la plus proche, ce qui donne :

$$F \simeq 10^{10} \times \frac{10^{-17} \times 10^{-19}}{(10^{-10})^2} = 10^{-6} \text{ N}$$

Ce n'est ici pas suffisant car on ne sait pas si la bonne réponse est la B ou la C.

Alors dans une deuxième approche, on réécrit chaque paramètre en ne gardant qu'un chiffre significatif, ce qui donne :

$$F \simeq 9 \times 10^9 \times \frac{8 \times 10^{-18} \times 2 \times 10^{-19}}{(2 \times 10^{-10})^2} = \frac{9 \times 8 \times 2}{2^2} \times 10^{-8} \simeq 4 \times 10^{-7} \text{ N}$$

On a ainsi déterminé sans calculatrice que la réponse correcte était la réponse B.