Épreuve 2022
Mathématiques & Physique
(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2022.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 3h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

PARTIE MATHÉMATIQUES

Questions liées :
1 à 3
4 à 6
7 et 8
9 à 11
12 à 15

PARTIE I

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

Question 1 :

Une fonction L écrite en langage Python, qui a pour paramètre un nombre entier $n \geqslant 2$ et qui renvoie le n-ième terme de la suite (u_n) est :

A -
```python
def L(n):
    u=1
    for i in range (2,n):
        u=u+1/i
    return u
```

B -
```python
def L(n):
    u=1
    for i in range (1,n):
        u=u+1/n
    return u
```

C -
```python
def L(n):
    u=1
    for i in range (2,n+1):
        u=u+1/i
    return u
```

D -
```python
def L(n):
    u=1
    for i in range (2,n):
        u=u+1/n
    return u
```

Question 2 :

La suite (u_n) vérifie :

A - Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$

B - Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{2n} - u_n < \frac{1}{2}$

C - Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$

D - Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{2^n} \leqslant 1 + \frac{n}{2}$

Question 3 :

La suite (u_n) :

A - Converge, car elle est croissante et majorée

B - Converge, car elle est décroissante et minorée

C - Diverge, car elle est minorée par une suite divergente non bornée

D - Diverge, car elle est majorée par une suite divergente non bornée

PARTIE II

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 10e^{u(x)}$, où u est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $u(x) = -e^{-2-\frac{x}{10}}$

Question 4 :

Pour tout réel $x \geqslant 0$, la fonction f est dérivable, et :

A - $f'(x) = e^{-e^{-2-\frac{x}{10}}}$

B - $f'(x) = (-20-x)e^{-e^{-2-\frac{x}{10}}}$

C - $f'(x) = 10u(x)e^{u(x)}$

D - $f'(x) = -u(x)e^{u(x)}$

Question 5 :

On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0;+\infty[$, et on note f'' la fonction dérivée de f'. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on obtient :

A - $f''(x) = 10(1+u(x))u'(x)e^{u(x)}$

B - $f''(x) = \dfrac{1}{10}(1+u(x))u(x)e^{u(x)}$

C - $f''(x) = -\dfrac{1}{10}e^{-e^{-2-\frac{x}{10}}}$

D - $f''(x) = \left(\dfrac{x^2}{10}+4x+39\right)e^{-e^{-2-\frac{x}{10}}}$

Question 6 :

La fonction dérivée f' est maximale pour :

A - $x = 20$

B - $x = 0$

C - $x = 10\left(2+\sqrt{0.1}\right)$

D - $x = 10\left(2-\sqrt{0.1}\right)$

PARTIE III

Question 7 :

Le système :

$$\begin{cases} 2\cos(x) + 3\sin(y) = \sqrt{2} - \dfrac{3}{2} \\ 4\cos(x) + \sin(y) = 2\sqrt{2} - \dfrac{1}{2} \\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \ -\pi \leqslant y \leqslant \pi \end{cases}$$

admet pour ensemble de solutions :

A - $S = \left\{ \left(-\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{2\pi}{3}\right); \left(-\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{3}\right); \left(\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{2\pi}{3}\right); \left(\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{3}\right) \right\}$

B - $S = \left\{ \left(-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{2\pi}{3}\right); \left(-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{3}\right); \left(\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{2\pi}{3}\right); \left(\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{3}\right) \right\}$

C - $S = \left\{ \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right); \left(-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{6}\right); \left(\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}\right); \left(-\dfrac{\pi}{6}; -\dfrac{5\pi}{6}\right) \right\}$

D - $S = \left\{ \left(-\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{5\pi}{6}\right); \left(-\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{6}\right); \left(\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{5\pi}{6}\right); \left(\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{6}\right) \right\}$

Question 8 :

Le système :

$$\begin{cases} 2\cos(x) + 3\sin(x) = \sqrt{2} - \dfrac{3}{2} \\ 4\cos(x) + \sin(x) = 2\sqrt{2} - \dfrac{1}{2} \\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

admet pour ensemble de solutions :

A - $S = \left\{ \left(-\dfrac{2\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right) \right\}$

B - $S = \left\{ \left(-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right) \right\}$

C - $S = \left\{ \left(-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right) \right\}$

D - $S = \left\{ \left(-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right) \right\}$

PARTIE IV

On lance deux dés parfaitement équilibrés à quatre faces numérotées 1 ; 2 ; 3 et 6. On considère la variable aléatoire $X = \cos\left(\frac{\pi}{A}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{B}\right)$, où A correspond à la face obtenue par le premier dé et B par le second.

Question 9 :

La probabilité p_1 que X soit entier est :

A - $p_1 = \frac{1}{4}$

B - $p_1 = \frac{3}{8}$

C - $p_1 = \frac{5}{16}$

D - $p_1 = \frac{9}{16}$

Question 10 :

La probabilité p_2 que X soit entier sachant que A est pair est :

A - $p_2 = \frac{1}{4}$

B - $p_2 = \frac{3}{8}$

C - $p_2 = \frac{5}{16}$

D - $p_2 = \frac{9}{16}$

Question 11 :

La probabilité p_3 que X soit un nombre rationnel est :

A - $p_3 = \frac{1}{4}$

B - $p_3 = \frac{3}{8}$

C - $p_3 = \frac{5}{16}$

D - $p_3 = \frac{9}{16}$

PARTIE V

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ on considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Question 12 :

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont :

A - non coplanaires

B - coplanaire

C - colinéaires

D - orthogonaux

Question 13 :

Un vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ si et seulement si les coordonnées de $\overrightarrow{n}$ vérifient le système :

A - $\begin{cases} a + 3b + 4c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases}$

B - $\begin{cases} -3a + b + 4c = 0 \\ -a - 2b + c = 0 \end{cases}$

C - $\begin{cases} a - 4b + 3c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases}$

D - $\begin{cases} -4a + 3b + c = 0 \\ a - b - 2c = 0 \end{cases}$

Question 14 :

Ainsi, on montre que :

A - Les coordonnées d'un tel vecteur $\overrightarrow{n}$ sont $\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

B - Les coordonnées d'un tel vecteur $\overrightarrow{n}$ sont $\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

C - Les coordonnées d'un tel vecteur $\overrightarrow{n}$ sont $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

D - Les coordonnées d'un tel vecteur $\overrightarrow{n}$ n'existent pas car le nombre d'équations et le nombre d'inconnues ne coïncident pas.

Question 15 :

Une équation du plan passant par $A(1;1;1)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est :

A - $-7x+5y+9z=0$

B - $x+y-z-1=0$

C - $9x-y+7z-15=0$

D - $-2x-2y+2z+2=0$

PARTIE PHYSIQUE

Questions liées :
16 à 24
25 à 28
29 et 30

Partie P1 (questions 16 à 24) : Images et lentilles

Document 1 - Relations pour une lentille mince

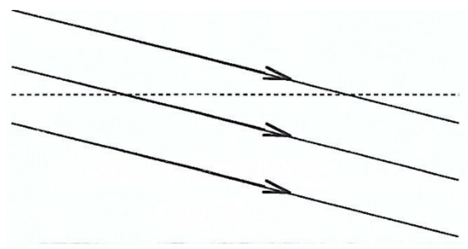
- Relation de conjugaison : $\dfrac{1}{\overline{OA'}}-\dfrac{1}{\overline{OA}}=\dfrac{1}{\overline{OF'}}$
- Grandissement : $\gamma=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

où O est le centre optique de la lentille, $\overline{OF'}$ (ou f') la distance focale de la lentille, AB l'objet et $A'B'$ l'image de cet objet obtenue avec la lentille mince.

Document 2 - Objet ou image à l'infini

Des rayons lumineux parallèles entre eux correspondent à un point objet situé à l'infini, ou à un point image situé à l'infini :

En provenance d'un point à l'infini



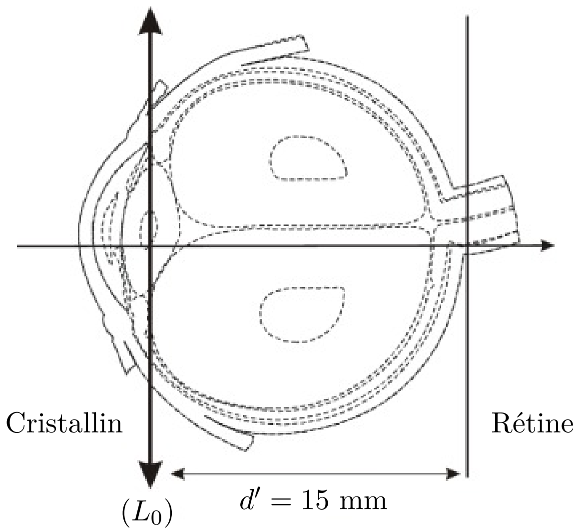
Vers un point à l'infini

Document 3 - Modèle optique de l'oeil

Dans un oeil, le cristallin est équivalent d'un point de vue optique à une lentille convergente dont la distance focale image peut varier grâce à des muscles qui déforment le cristallin. Quand ces muscles sont au repos, la distance focale prend une valeur maximale notée f'_R. Quand les muscles se contractent, la distance focale diminue jusqu'à une valeur minimale notée f'_P.

Au fond de l'oeil, la rétine joue le rôle d'un écran sur lequel se forme une image qui pourra être perçue par le cerveau. On dit que l'oeil accommode quand il ajuste la distance focale du cristallin de manière que l'image sur la rétine soit nette.

Dans toute la suite, on modélisera l'oeil humain par une lentille convergent L_0 et un écran, les deux étant placés dans l'air, la distance entre la lentille et l'écran étant $d' = 15$ mm.

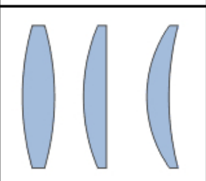
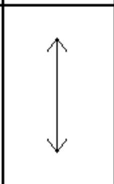
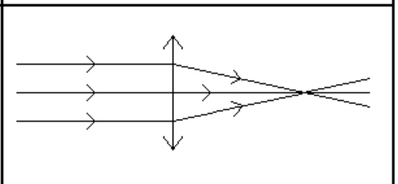
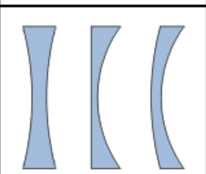
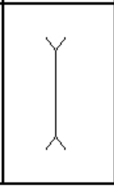
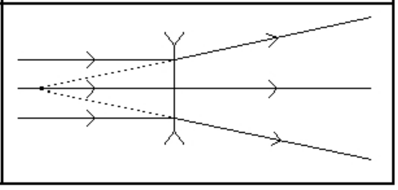


(D'après CONCOURS COMMUN 2007 DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES)

Document 4 - Lentilles convergentes et divergentes

Une lentille convergente est une lentille à bords minces alors qu'une lentille divergente est une lentille à bords épais.

Les relations de conjugaison et de grandissement sont les même pour une lentille divergente et une lentille convergente, la seule différence étant que la distance focale image $\overline{OF'} = f'$ d'une lentille divergente est négative (alors que celle d'une lentille convergente est positive).

	vue en coupe	schéma	déviation de la lumière
lentilles convergentes			
lentilles divergentes			

Document 5 - Quelques fractions

$\dfrac{1800}{135} \simeq 13,33$	$\dfrac{3750}{265} \simeq 14,15$	$\dfrac{18000}{1215} \simeq 14,81$
$\dfrac{18000}{1185} \simeq 15,19$	$\dfrac{3750}{235} \simeq 15,96$	$\dfrac{1800}{105} \simeq 17,14$

Question 16 :

Au repos, un oeil normal voit net des objets à l'infini. Dans ces conditions, f'_R est comprise entre :

A - 0 et 10 mm

B - 10 et 12 mm

C - 12 et 14 mm

D - 14 et 16 mm

Question 17 :

Un oeil humain d'une quarantaine d'année ne peut pas voir net les objets qui sont à moins de 25 cm du cristallin. Dans ces conditions, f'_P est comprise entre :

A - 0 et 10 mm

B - 10 et 12 mm

C - 12 et 14 mm

D - 14 et 16 mm

Question 18 :

On considère que pour qu'un détail d'un objet puisse être distingué par l'oeil humain, il faut que l'image de ce détail sur la rétine soit plus grande de 5 μm. Dans ces conditions, la taille du détail le plus petit que peut distinguer un oeil humain d'une quarantaine d'année est comprise entre :

A - 100 μm et 300 μm

B - 300 μm et 1 mm

C - 1 mm et 3 mm

D - 3 mm et 10 mm

Question 19 :

Soit maintenant un oeil myope voyant net tout objet situé entre 12 cm et 1,2 m du cristallin, mais voyant flou tout objet situé en dehors de cet intervalle. Dans ces conditions, f'_R est comprise entre :

A - 0 et 10 mm

B - 10 et 12 mm

C - 12 et 14 mm

D - 14 et 16 mm

Question 20 :

De même, f'_P est comprise entre :

A - 0 et 10 mm

B - 10 et 12 mm

C - 12 et 14 mm

D - 14 et 16 mm

Question 21 :

La taille du détail le plus petit que peut distinguer cet oeil myope est comprise entre :

A - 30 μm et 100 μm

B - 100 μm et 300 μm

C - 300 μm et 1 mm

D - 1 mm et 3 mm

Question 22 :

Soit une lentille divergente dont la distance focale est $f' = -250$ mm. On place un objet (réel) à 1,00 m de cette lentille. On obtient une :

A - image réelle à une distance comprise entre 0 et 230 mm de la lentille.

B - image réelle à une distance comprise entre 230 mm et 500 mm de la lentille.

C - image virtuelle à une distance comprise entre 0 et 230 mm de la lentille

D - image virtuelle à une distance comprise entre 230 mm et 500 mm de la lentille

Question 23 :

Si l'objet est à l'infini, l'image correspondante est une :

A - image réelle à une distance comprise entre 0 et 230 mm de la lentille.

B - image réelle à une distance comprise entre 230 mm et 500 mm de la lentille.

C - image virtuelle à une distance comprise entre 0 et 230 mm de la lentille

D - image virtuelle à une distance comprise entre 230 mm et 500 mm de la lentille

Question 24 :

On souhaite corriger l'oeil myope précédent de manière qu'au repos, de même qu'un oeil normal, il voie net des objets à l'infini. Pour cela, on place une lentille divergente à 10 mm du cristallin. La distance focale de cette lentille doit être comprise entre :

A - -7,5 m et -1,15 m

B - -1,15 m et -0,75 m

C - -0,75 m et -0,115 m

D - -0,115 m et 0

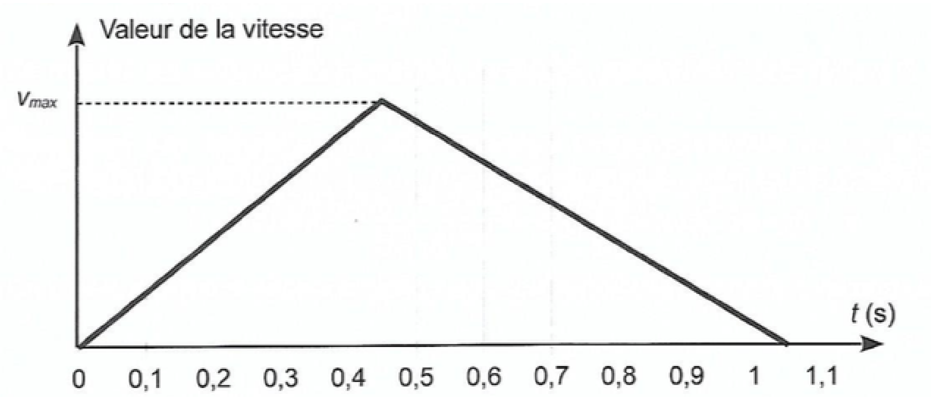
Partie P2 (questions 25 à 28) : Énergies et mouvement d'un système mécanique

Document 6 - Pesanteur à la surface de la Terre

Au voisinage de la Terre, le poids d'un objet est la force de pesanteur qu'il subit de la part de la Terre. Si un objet de masse 1,0 kg est placé à la surface de la Terre, au voisinage du niveau de la mer, la valeur de son poids est 9,8 N. Si cet objet chute d'une hauteur de 1,0 m, le travail de son poids est 9,8 J.

Un objet de masse $m = 100$ g est lâché sans vitesse initiale à une hauteur $h = 1,00$ m de la surface d'un plan d'eau. Il atteint l'eau au bout d'une durée de 0,45 s. Une fois immergé, l'objet continue de descendre pendant une durée de 0,60 s avant de s'arrêter et de commencer à remonter.

Pendant ce mouvement, la valeur de la vitesse de l'objet évolue en fonction du temps t comme indiqué sur la graphe ci-dessous.



Question 25 :

En considérant que l'objet n'est soumis qu'à son poids avant d'atteindre la surface de l'eau, son énergie cinétique maximale est comprise entre :

- **A -** 0,6 J et 6 J
- **B -** 6 J et 60 J
- **C -** 60 J et 600 J
- **D -** 600 J et 6 kJ

Question 26 :

Dans ces conditions, la valeur maximale de sa vitesse v_{max} (toujours avant son immersion) est comprise entre :

- **A -** 1 $m.s^{-1}$ et 3 $m.s^{-1}$
- **B -** 3 $m.s^{-1}$ et 10 $m.s^{-1}$
- **C -** 10 $m.s^{-1}$ et 30 $m.s^{-1}$
- **D -** 30 $m.s^{-1}$ et 100 $m.s^{-1}$

Question 27 :

Une fois immergé, l'objet est soumis en plus de son poids à la poussée d'Archimède qui est une force constante verticale dirigée vers le haut. La valeur de la force totale subie par l'objet dans l'eau est :

A - $\dfrac{m\Delta t}{\mathrm{v_{max}}}$ avec $\Delta t = 0,60$ s

B - $\dfrac{m\mathrm{v_{max}}}{\Delta t}$ avec $\Delta t = 0,60$ s

C - $\dfrac{m\Delta t}{\mathrm{v_{max}}}$ avec $\Delta t = 1,05$ s

D - $\dfrac{m\mathrm{v_{max}}}{\Delta t}$ avec $\Delta t = 1,05$ s

Question 28 :

La valeur de la poussée d'Archimède est alors comprise entre :

A - 0,03 N et 1 N

B - 1 N et 30 N

C - 30 N et 1 kN

D - 1 kN et 30 kN

Partie P3 (questions 29 et 30) : Aspect énergétiques des phénomènes électriques

Question 29 :

Un résistor de résistance 270 Ω est parcouru par une intensité continue de 160 mA. La puissance dissipée par ce résistor par effet Joule est comprise entre :

A - 1 W et 10 W

B - 10 W et 100 W

C - 100 W et 1 kW

D - 1 kW et 10 kW

Question 30 :

Si ce résistor fonctionne pendant une durée de 5 min, il dissipe une énergie comprise entre

A - 30 J et 100 J

B - 100 J et 300 J

C - 300 J et 1 kJ

D - 1 kJ et 3 kJ