Épreuve 2023

Mathématiques & Physique

(concours ENAC GSEA/TSEEAC)

Préambule

Ce document propose l'énoncé de l'épreuve de Mathématiques & Physique du concours GSEA/TSEEAC 2023.

Consignes

La durée de l'épreuve est de 3h. La calculatrice est interdite. Le jour de l'épreuve, les réponses sont reportées sur un formulaire où le candidat noirci les cases «A», «B», «C», «D» ou «E». Il est demandé d'utiliser un stylo bille ou une pointe feutre de couleur noire.

Les questions comportent zéro, une ou deux réponses correctes. Dans le cas où le candidat juge qu'aucune des propositions n'est juste, il noircira la case «E» sur le formulaire de réponses.

Attirons l'attention sur le fait que toute réponse fausse peut entrainer pour la question correspondante une pénalité sur la note. À ce sujet, l'ENAC ne communique pas le barème. Il est donc conseillé, sans plus de précision sur le risque, de rester prudent.

PARTIE MATHÉMATIQUES

Questions liées :

1 à 4

5 à 9

10-11

12 à 15

Notations

Les lettres $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ désignent respectivement les ensembles des réels, des entiers naturels et des entiers relatifs.

PARTIE I

On procède chez un sportif à l'injection intramusculaire d'un produit. Celui-ci se diffuse progressivement dans le sang. On admet que la concentration de ce produit dans le sang, exprimée en mg.L^{-1} (milligrammes par litre) peut être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 8]$ par :

$$g(t) = 6te^{-t} \text{ où } t \text{ est le temps exprimé en heures.}$$

Question 1 :

La fonction dérivée g' de g est donnée par :

A - $g'(t) = -6te^{-t}$

B - $g'(t) = -6e^{-t}$

C - $g'(t) = (-6 - 6t)e^{-t}$

D - $g'(t) = (6 - 6t)e^{-t}$

Question 2 :

On en déduit :

A - $g'(t)$ est négative sur $[0; 8]$

B - $g'(t)$ est décroissante sur $[0; 8]$

C - $g'(t)$ est positive sur $[0; 1[$ et négative sur $]1; 8]$

D - $g'(t)$ est négative sur $[0; 1[$ et positive sur $]1; 8]$

Question 3 :

On donne $e \approx 2,72$ et $\dfrac{1}{e} \approx 0,37$:

A - Une valeur approchée du maximum de la fonction g sur $[0; 8]$ est $M \approx 16,32$

B - Une valeur approchée du maximum de la fonction g sur $[0; 8]$ est $M \approx 2,22$

C - Le minimum de la fonction g sur $[0; 8]$ est $m = 0$

D - Une valeur approchée du minimum de la fonction g sur $[0; 8]$ est $m \approx 2,22$

Le produit fait l'objet d'une réglementation par la fédération sportive. Pour ne pas être en infraction, la concentration de ce produit au moment du contrôle, doit être inférieure à 0,05 mg.L^{-1}.

Question 4 :

Un algorithme pour lequel la variable t contient à la fin de son exécution le nombre de minutes qu'il faut attendre après l'injection pour que le sportif soit à nouveau en règle avec la législation est :

A -

$t \leftarrow 60$
$y \leftarrow 2,22$

Tant que y<=0,05

$t \leftarrow t+1$
$y \leftarrow 6 * t * \exp(-t).$

Fin Tant que

B -

$t \leftarrow 60$
$y \leftarrow 16,32$

Tant que y>=0,05

$t \leftarrow t+1$
$y \leftarrow \frac{t}{10} * \exp\left(-\frac{t}{60}\right)$

Fin Tant que

C -

$t \leftarrow 60$
$y \leftarrow 2,22$

Tant que y>=0,05

$t \leftarrow t+1$
$y \leftarrow 6 * t * \exp(-t).$

Fin Tant que

D -

$t \leftarrow 60$
$y \leftarrow 2,22$

Tant que y<=0,05

$t \leftarrow t+1$
$y \leftarrow \frac{t}{10} * \exp\left(-\frac{t}{60}\right)$

Fin Tant que

PARTIE II

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail. Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85% de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020.

Question 5 :

De cet énoncé, on déduit :

A - $a_0 = 5000$
B - $a_0 = 200$
C - $a_1 = 4700$
D - $a_1 = 552,5$

Question 6 :

Pour tout entier naturel n, on montre que :

A - $a_{n+1} = 0,15a_n + 450$
B - $a_{n+1} = 0,15a_n + 67,5$
C - $a_{n+1} = 0,85a_n + 382,5$
D - $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.

Question 7 :

La suite (v_n) est :

A - arithmétique de raison -3000
B - arithmétique de raison 3000
C - géométrique de raison 0,85
D - géométrique de raison 0,15

Question 8 :

On montre ainsi que :

A - $v_n = 200 - 3000n$
B - $v_n = 2800 \times 0,85^n$
C - $a_n = -2800 + 3000(n-1)$
D - $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$

Question 9 :

Le nombre de télétravailleurs en septembre 2021 était alors de :

A - $200 - 3000 \times 17$

B - $2800 \times 0,85^{17}$

C - $-2800 + 3000 \times 16$

D - $-2800 \times 0,85^{17} + 3000$

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le premier mois de mai 2020.

Question 10 :

La fonction f est définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x + 4}{x + 2}$. Alors :

A - f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

B - f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

C - Il existe $a \in [0; +\infty[$ tel que la fonction f est strictement décroissante sur $[0; a[$ et strictement croissante sur $]a; +\infty[$

D - Il existe $a \in [0; +\infty[$ tel que la fonction f est strictement croissante sur $[0; a[$ et strictement décroissante sur $]a; +\infty[$

Question 11 :

Pour tout entier naturel n, la suite (u_n) vérifie :

A - $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

B - $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$

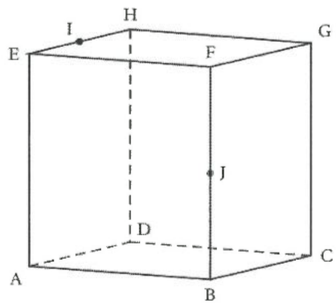
C - $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$

D - $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$

PARTIE III

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.

On note I et J les milieux respectifs des segments $[EH]$ et $[FB]$.



Question 12 :

Les points I et J admettent pour coordonnées :

A - $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$

B - $I\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$

C - $J\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$

D - $J\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$

Question 13 :

Un vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (BGI) si et seulement si les coordonnées de $\overrightarrow{n}$ vérifient le système :

A - $\begin{cases} -a + c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases}$

B - $\begin{cases} b + c = 0 \\ -2a + b + 2c = 0 \end{cases}$

C - $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases}$

D - $\begin{cases} b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$

Question 14 :

Ainsi, on montre que :

A - Les coordonnées d'un tel vecteur $\overrightarrow{n}$ peuvent être $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

B - Les coordonnées d'un tel vecteur $\overrightarrow{n}$ peuvent être $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

C - Les coordonnées d'un tel vecteur $\overrightarrow{n}$ peuvent être $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

D - Les coordonnées d'un tel vecteur $\overrightarrow{n}$ peuvent être $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Question 15 :

Une équation du plan (BGI) est alors :

A - $x - 2y + 2z - 1 = 0$

B - $x - y + z = 0$

C - $x - 2y + 1 = 0$

D - $2x - y + z - 2 = 0$

PARTIE PHYSIQUE

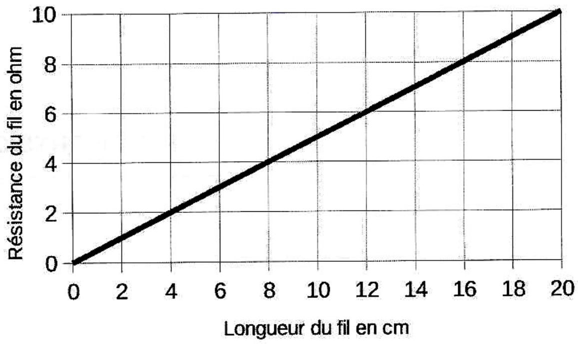
Questions liées :
16 à 22
23 à 28
29 et 30

Certaines questions demandent un calcul numérique. Si le calcul est trop complexe pour être effectué sans calculatrice, la réponse à la question pourra être trouvée à l'aide de l'évaluation de l'ordre de grandeur du résultat (voir le document annexe à la fin du sujet pour plus de détails).

Partie P1 (questions 16 à 22) : Étude d'une source réelle de tension continue

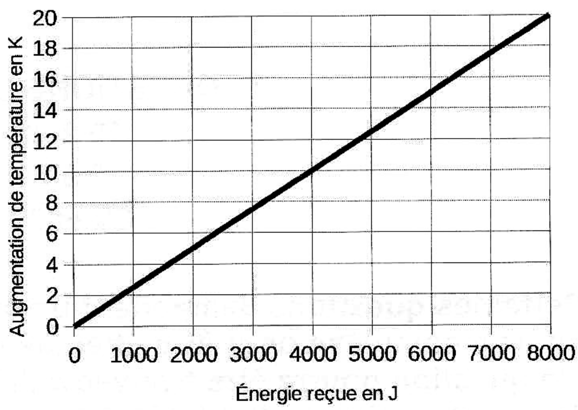
Document 1 - Résistance d'un fil électrique

On dispose d'une bobine de fil électrique. Ce fil est homogène et a une section constante.
Si on découpe une longueur L de ce fil, on obtient un conducteur ohmique dont la résistance électrique R est donnée à l'aide du graphe ci-dessous.
Par exemple, si on découpe une longueur $L = 10$ cm de ce fil, la résistance de ce segment de fil est $R = 5\ \Omega$.



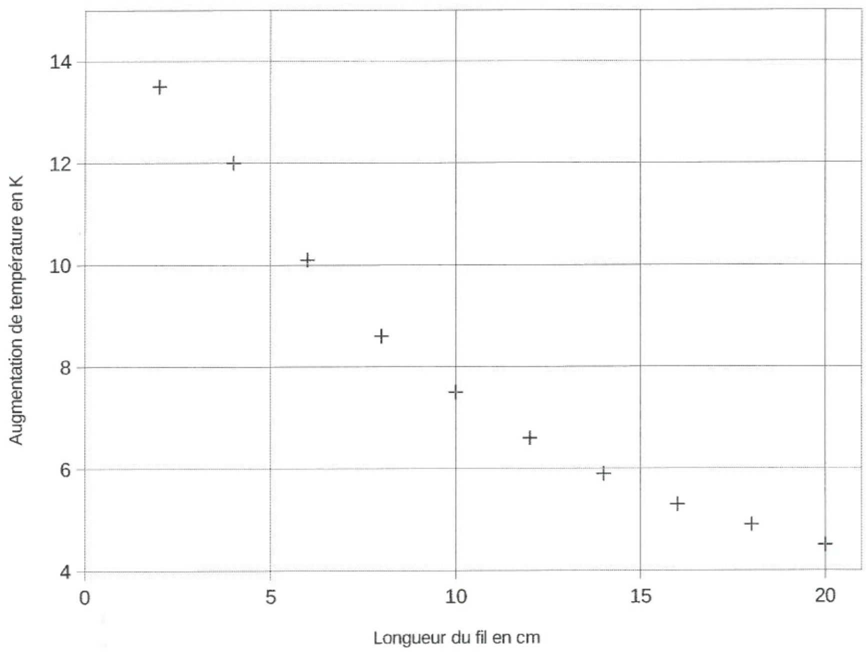
Document 2 - Dispositif de mesure d'énergie libérée par effet Joule

On dispose d'un liquide dans un récipient isolé thermiquement.
Si on plonge un conducteur ohmique dans ce liquide, la température augmente à cause de l'énergie reçue par le liquide en provenance du conducteur par effet Joule.
Le graphe ci dessous représente l'augmentation de température en fonction de cette énergie reçue par le liquide.
Par exemple, si le liquide est initialement à une température de 19 °C et s'il reçoit une énergie de 4 000 J, sa température devient 29 °C.



On souhaite étudier une source réelle de tension continue mais on ne dispose pas de multimètre. On ne dispose que de la bobine de fil électrique du document 1 et du liquide dans son récipient du document 2, ainsi que d'un thermomètre.

Pour différentes longueurs du fil électrique, on branche la source de tension aux bornes de ce fil, on plonge le fil dans un liquide pendant 10,0 minutes et on mesure l'augmentation de température du liquide. Les résultats son représentés sur le graphe suivant.



Question 16 :

Soit un conducteur ohmique de résistance 10,0 Ω que l'on branche à une source de tension 10,0 V. L'intensité traversant ce conducteur est comprise entre :

A - 0 et 300 mA

B - 300 mA et 3 A

C - 3 A et 30 A

D - 30 A et 300 A

Question 17 :

La puissance dissipée par effet Joule par ce conducteur est comprise entre :

A - 0 et 30 W

B - 30 W et 300 W

C - 300 W et 3 kW

D - 3 kW et 30 kW

Question 18 :

Pour pouvoir calculer tension et intensité en fonction de la résistance et de l'énergie dissipée par effet Joule pendant 10,0 minutes pour un conducteur ohmique, on écrit le programme suivant en Python :

```
1   import math
2   resistance = float(input("Valeur de la résistance en ohm : "))
3   energie = float(input("Valeur de l’énergie dissipée par effet Joule en J : "))
4   duree = 600. # durée de 10 min = 600 s
5   puissance = energie/duree # puissance effet Joule en W
6   tension = math.sqrt(puissance/resistance) # tension en V
7   print("Tension =", tension, "V")
8   print("Intensite =", tension/resistance, "A")
```

Dans ce programme, il y a une (ou des) erreur(s)

A - ligne 5

B - ligne 6

C - ligne 7

D - ligne 8

Question 19 :

Dans la manipulation avec la source réelle de tension continue, pour une longueur de fil de 2,00 cm, la tension aux bornes de ce fil est comprise entre :

A - 1,9 V et 2,1 V

B - 2,9 V et 3,1 V

C - 3,9 V et 4,1 V

D - 5,4 V et 5,6 V

Question 20 :

Pour une longueur de 20,0 cm, la tension est comprise entre :

A - 1,9 V et 2,1 V

B - 2,9 V et 3,1 V

C - 3,9 V et 4,1 V

D - 5,4 V et 5,6 V

Question 21 :

La source réelle de tension continue est modélisable par l'association en série d'une source idéale de tension continue et d'une résistance. La valeur de cette résistance est comprise entre :

A - 0 et 3 Ω

B - 3 Ω et 30 Ω

C - 30 Ω et 300 Ω

D - 300 Ω et 3 kΩ

Question 22 :

La tension délivrée par la source idéale de tension continue est comprise entre :

A - 300 mV et 1V

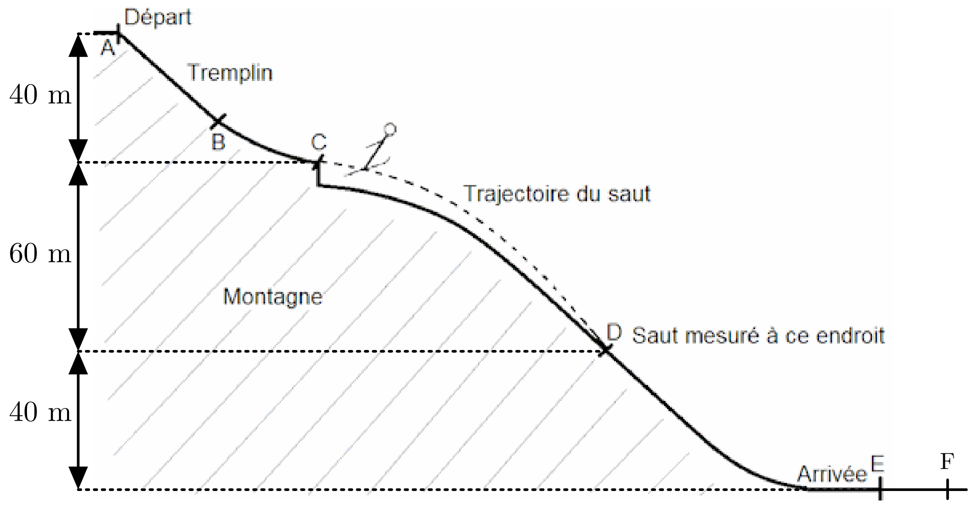
B - 1 V et 3 V

C - 3 V et 10 V

D - 10 V et 30 V

Partie P2 (questions 23 à 28) : Étude d'un saut à ski

Un skieur de masse de 70 kg effectue un saut à ski en suivant la trajectoire représentée sur le schéma ci-dessous :



Lors du saut, le skieur part de A avec une vitesse nulle.
Il atteint le point C où il décolle avec une vitesse de 20 m.s^{-1}.
Entre C et D, il vole au dessus de la piste et tous les frottements deviennent négligeables devant le poids.
Il freine entre D et F.
Sa vitesse en E est 30 m.s^{-1}.
La distance entre E et F étant de 50 m, il arrive au point F avec une vitesse nulle.
L'intensité de la pesanteur tout au long de la piste de ski est $g = 9,81$ N.kg^{-1}.

Question 23 :

L'énergie cinétique du skieur en C est comprise entre :

A - 300 J et 1 kJ

B - 1 kJ et 3 kJ

C - 3 kJ et 10 kJ

D - 10 kJ et 30 kJ

Question 24 :

Si on prend une énergie potentielle de pesanteur nulle en A, cette énergie en E devient comprise entre :

A - -300 kJ et -30 kj

B - -30 kJ et 0

C - 0 et 30 kJ

D - 30 kJ et 300 kJ

Question 25 :

Le travail des forces de frottement entre le point A et le point C est compris entre :

A - -300 kJ et -30 kJ

B - -30 kJ et 0

C - 0 et 30 kJ

D - 30 kJ et 300 kJ

Question 26 :

La vitesse au point D est comprise entre :

A - 0 et 7 m.s^{-1}

B - 7 m.s^{-1} et 20 m.s^{-1}

C - 20 m.s^{-1} et 70 m.s^{-1}

D - 70 m.s^{-1} et 200 m.s^{-1}

Question 27 :

La force de freinage entre E et F, supposée constante, est comprise entre :

A - 0 et 30 N

B - 30 N et 100 N

C - 100 N et 300 N

D - 300 N et 1 000 N

Question 28 :

La durée de freinage entre E et F est comprise entre :

A - 0 et 2 s

B - 2 s et 6 s

C - 6 s et 20 s

D - 20 s et 1 min

Partie P3 (questions 29 et 30) : Formation d'une image

Document 3 - Relations pour une lentille mince

- Relation de conjugaison : $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}}$
- Grandissement : $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

où O est le centre optique de la lentille, $\overline{OF'}$ (ou f') la distance focale de la lentille, AB l'objet et $A'B'$ l'image de cet objet obtenue avec la lentille mince.

Document 4 - Quelques fractions

$\dfrac{60}{529} \simeq 0,113$	$\dfrac{60}{391} \simeq 0,153$	$\dfrac{3}{17} \simeq 0,176$	$\dfrac{20}{23} \simeq 0,870$

On a un objet dont la hauteur est 20 cm. À l'aide d'une lentille convergente, on désire réaliser une image de 3,0 cm de hauteur de cet objet, la distance entre l'objet et l'image étant 1,0 m.

Question 29 :

On doit placer la lentille à une distance de l'objet comprise entre :

A - 10 cm et 20 cm
B - 20 cm et 30 cm
C - 70 cm et 80 cm
D - 80 cm et 90 cm

Question 30 :

La distance focale de la lentille est comprise entre :

A - 0 et 8 cm
B - 8 cm et 10 cm
C - 10 cm et 12 cm
D - 12 cm et 14 cm

Document annexe - Exemple d'évaluation de l'ordre de grandeur du résultat d'un calcul numérique

Soit une valeur de force F pour laquelle on sait que sa valeur en Newton est :

$$F = 8,99 \times 10^9 \times \frac{8,48 \times 10^{-18} \times 1,60 \times 10^{-19}}{(1,65 \times 10^{-10})^2}$$

On demande si une valeur est comprise entre :

A - 10^{-7} N et 3×10^{-7} N

B - 3×10^{-7} N et 10^{-6} N

C - 10^{-6} N et 3×10^{-6} N

D - 3×10^{-6} N et 10^{-5} N

Une première approche consiste à remplacer chaque paramètre par sa puissance de 10 la plus proche, ce qui donne :

$$F \simeq 10^{10} \times \frac{10^{-17} \times 10^{-19}}{(10^{-10})^2} = 10^{-6} \text{ N}$$

Ce n'est ici pas suffisant car on ne sait pas si la bonne réponse est la B ou la C.

Alors dans une deuxième approche, on réécrit chaque paramètre en ne gardant qu'un chiffre significatif, ce qui donne :

$$F \simeq 9 \times 10^9 \times \frac{8 \times 10^{-18} \times 2 \times 10^{-19}}{(2 \times 10^{-10})^2} = \frac{9 \times 8 \times 2}{2^2} \times 10^{-8} \simeq 4 \times 10^{-7} \text{ N}$$

On a ainsi déterminé sans calculatrice que la réponse correcte était la réponse B.